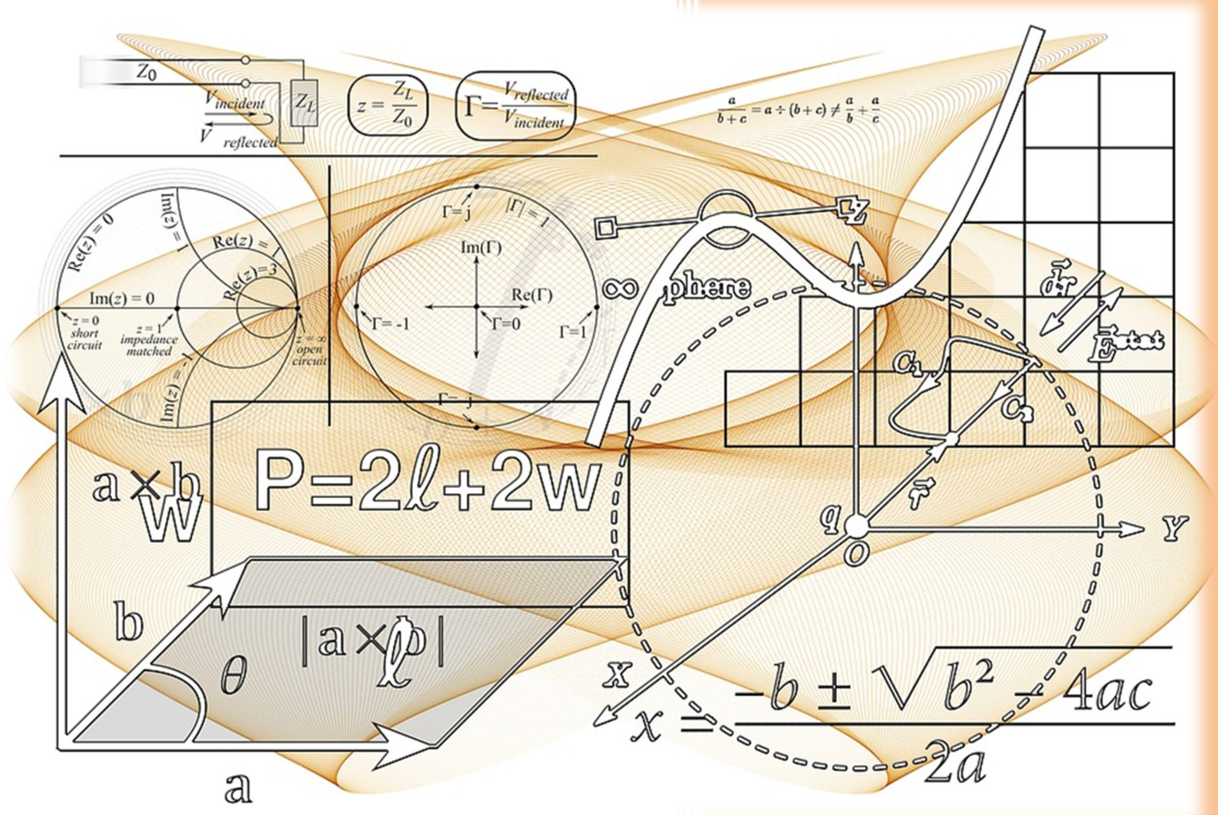
2019

Matemáticas

Aritmética y Álgebra



Página web:
http://clasesmario.jimdo.com

@clasesmario

Correo Electrónico
clasesmario@hotmail.com

Este cuadernillo es el resultado de meses de recopilación de información, de ninguna manera pretende ser sustituto de algún libro, está dividido en una sección de aritmética y otra de álgebra.

La manera en la que se abordan los temas busca que la información sea de manera clara, haciendo uso de diagramas, colores, ejemplos y ejercicios al final de cada sección con la finalidad de practicar.

Espero que esta información te sea de utilidad y que el tiempo invertido para su desarrollo valga la pena al ser aprovechado en tu desarrollo académico el cual será mi mayor satisfacción.

Cualquier observación y/o comentario son bienvenidos con la confianza que serán tomados en cuenta.

Saludos cordiales de tu amigo:

Mario Alberto De La Cruz Padilla

@clasesmario

Todo en la vida es gracias al apoyo de la familia y las personas que te quieren.
Este trabajo es por ustedes.

ARITMÉTICA

CAPÍTULO 1
ARITMÉTICA

		PÁG.
1.1	Suma y resta con signos de agrupación.-	1
1.2	Divisibilidad.-	3
1.3	Números primos.-	7
1.4	Descomposición de un número en sus factores primos. -	8
1.5	Máximo común divisor (MCD).-	9
1.6	Mínimo común múltiplo (mcm).-	11
1.7	Problemas y ejercicios de aplicación.-	13

CAPÍTULO 2
NÚMEROS RACIONALES

2.1	Fracción común.-	18
2.2	Conversión de fracciones impropias a mixtas.-	21
2.3	Conversión de fracciones mixtas a impropias.-	22
2.4	Fracciones equivalentes.-	22
2.5	Ubicación de fracciones en la numérica.-	24
2.6	Suma y resta de fracciones.-	27

PÁG.

2.7 Multiplicación de fracciones.- - - - - - - - 33

2.8 División de fracciones.- - - - - - - - - 37

2.9 Operaciones con signos de agrupación.- - - - - - - 39

2.10 Operaciones complejas.- - - - - - - - - 42

CAPÍTULO 3
POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

3.1 Potenciación.-- - - - - - - - - - 46

3.2 Operaciones con exponentes.- - - - - - - - 50

3.3 Radicación.- - - - - - - - - - - 53

3.4 Simplificación.- - - - - - - - - - 57

3.5 Suma y resta.-- - - - - - - - - - 59

3.6 Multiplicación. - - - - - - - - - - 62

3.7 División. - - - - - - - - - - - 66

3.8 Racionalización. - - - - - - - - - - 68

ÁLGEBRA

CAPÍTULO 4
OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

PÁG.

4.1	Diferencia del álgebra con la aritmética.- - - - - - -	74
4.2	Notación y terminología álgebraicas.- - - - - - -	74
4.3	Evaluación de expresiones álgebraicas.- - - - - - -	79
4.4	Adición y sustracción de polinomios.- - - - - - -	81
4.5	Signos de agrupación.- - - - - - - - -	83
4.6	Productos de monomios y polinomios.- - - - - - -	85
4.7	División de polinomios.- - - - - - - - -	88

CAPÍTULO 5
PRODUCTOS NOTABLES

5.1.	Cuadrado de un binomio.- - - - - - - - -	91
5.2	Cubo de un binomio. - - - - - - - - -	92
5.3	Binomio elevado a la potencia n (Triángulo de Pascal).- - - - -	94
5.4	Producto de binomios conjugados.- - - - - - - -	98
5.5	Producto de binomios con un término común.- - - - - -	100

CAPÍTULO 6
FACTORIZACIÓN

6.1	Factor común de un polinomio.- - - - - - - -	102
6.2	Factorización por agrupamiento.- - - - - - - -	104
6.3	Factorización de una diferencia de cuadrados perfectos.- - - - -	105
6.4	Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.- - - - - -	106
6.5	Factorización de un trinomio, completándolo a trinomio cuadrado perfecto.- -	109
6.6	Factorización de un trinomio de la forma ax^2+bx+c.- - - - -	112
6.7	Factorización de un polinomio por el método de evaluación (división sintética).- -	116

CAPÍTULO 7
FRACCIONES ÁLGEBRAICAS

PÁG.

7.1	Principio fundamental de las fracciones.-	124
7.2	Simplificación de fracciones álgebraicas.-	124
7.3	Multiplicación de fracciones álgebraicas.-	126
7.4	División de fracciones álgebraicas.-	128
7.5	Adición y sustracción de fracciones álgebraicas.-	130
7.6	Fracciones complejas.-	134

CAPÍTULO 8
EXPONENTES Y RADICALES

8.1	Notación y leyes de los exponentes.-	139
8.2	Leyes de los radicales.-	142
8.3	Adición y sustracción de radicales.-	146
8.4	Multiplicación y división de radicales.-	147

RESULTADOS DE LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Capítulo 1

ARITMÉTICA

La aritmética es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: suma, resta, multiplicación y división.

Para todos es muy sencillo encontrar la aritmética dentro de nuestra vida cuando:

- ✓ Vamos a la tienda a comprar algo, y tenemos la necesidad de calcular por medio de una resta, el cambio que nos dará el tendero.
- ✓ Cuando estamos a punto de a abordar el servicio público y rápidamente hacemos cuentas para tener lista la cantidad de dinero necesaria para pagar el valor del pasaje.
- ✓ También cuando hacemos la cuenta o inventario de nuestras cosas.

Se piensa que la Aritmética nace con la necesidad de contar los objetos y animales que el ser humano primitivo poseía.

1.1 Suma y resta con signos de agrupación

Al realizar sumas y restas de números enteros que tienen signos de agrupación, primero es necesario eliminar dichos signos, para hacerlo se debe seguir el siguiente procedimiento:

Si un signo de agrupación <u>lo precede un signo positivo</u>, el número entero que encierra <u>conserva su signo</u>.

Si un signo de agrupación <u>lo precede un signo negativo</u>, el número entero que encierra <u>cambia su signo</u>.

Ejemplo 1.1

a) ¿Cuál es el resultado de $(-\mathbf{8})+(-\mathbf{3})$?

Solución.

Puesto que ambos signos de agrupación están precedidos por signos positivos, entonces se suprimen y se realiza la operación para obtener el resultado:

$$(-8)+(-3)=-8-3=-11$$

b) Resuelve $-(\mathbf{14})-(-\mathbf{10})$

Solución.

A los signos de agrupación le anteceden signos negativos, entonces se deben cambiar los signos de los enteros y realizar la operación que resulta.

$$-(14)-(-10)=-14+10=-4$$

c) Efectúa $(+\mathbf{6})+(-\mathbf{8})$

Solución.

Al estar precedidos por signos positivos, ambos enteros conservan su signo y se obtiene como resultado.

$$(+6)+(-8)=+6-8=-2$$

d) ¿Cuál es el resultado de $(-\mathbf{6})+(-\mathbf{3})-(-\mathbf{11})$***?***

Solución.

Se aplican los procedimientos correspondientes a cada signo de agrupación y se procede a efectuar la operación con enteros.

$$(-6)+(-3)-(-11)=-6-3+11=2$$

e) Obtén el resultado de $(\mathbf{6}-\mathbf{8})+(\mathbf{5}-\mathbf{2})$

Solución.

Una forma de realizar la operación es efectuar las operaciones que encierran cada uno de los signos de agrupación.

$$(6-8)+(5-2)=(-2)+(3)$$

Se aplican los criterios mencionados y se realizan las operaciones pertinentes para obtener el resultado:

$$(6-8)+(5-2)=(-2)+(3)=-2+3=1$$

f) ***¿Cuál es el resultado de*** $[(-\mathbf{8}+\mathbf{6})-(-\mathbf{3}-\mathbf{2})]+[\mathbf{4}-(\mathbf{2}-\mathbf{1})]$?

Solución.

Se efectúan las operaciones contenidas en los paréntesis.

$$[(-8+6)-(-3-2)]+[4-(2-1)]=[(-2)-(-5)]+[4-(1)]$$

Se eliminan los paréntesis y se realizan las operaciones que encierran los corchetes:

$$=[-2+5]+[4-1]=[3]+[3]=3+3=6$$

1.2 Divisibilidad.

Sean a y b números enteros. Se dice que “a” es divisible entre b si el residuo de $a \div b$ es cero.

Ejemplo 1.2

- ✓ 48 es divisible entre 16 porque $48=(16)(3)+0$, es decir, no se tiene residuo.
- ✓ 1512 es divisible entre 42 porque $1512=(42)(36)+0$
- ✓ 385 no es divisible entre 12 porque $385=(12)(32)+1$, es decir, el residuo es diferente de cero.

MÚLTIPLO.- El múltiplo de un número es el que lo contiene un número exacto de veces.

Ejemplo 1.3

- ✓ 36 es múltiplo de 9, porque lo contiene 4 veces.
- ✓ 240 es múltiplo de 12, porque lo contiene 20 veces.

Los múltiplos de un número k se obtienen al multiplicar k por los números naturales.

Ejemplo 1.4

- ✓ Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ..., porque 3(1)=3, 3(2)=6, 3(3)=9, 3(4)=12, . . .
- ✓ Los múltiplos de 5 son: 5, 10, 15, 20, 25, 30, . . ., porque 5(1)=5, 5(2)=10, 5(3)=15, 5(4)=20, ...
- ✓ Los múltiplos de 8 son: 8, 16, 24, 32, 40, 48, . . . , porque 8(1)=8, 8(2)=16, 8(3)=24, 8(4)=32, . .

NÚMERO COMPUESTO.- Es aquel que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, lo es entre otro factor.

Ejemplo 1.5

- ✓ 12 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
- ✓ 28 es número compuesto, porque tiene como divisores al: 1, 2, 4, 7, 14 y 28.

Los criterios de divisibilidad nos permiten visualizar cuando un número entero es divisible entre otro sin efectuar la división. A continuación, se enuncian algunos de ellos.

DIVISIBILIDAD ENTRE:	CONDICIÓN:
2	Si termina en cero o un número par.
3	Si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3.
4	Si sus últimos 2 dígitos son 0 o un múltiplo de 4.
5	Si su último dígito es 0 o 5.
6	Si a su vez es divisible entre 2 y 3.
7	Cuando al multiplicar el último dígito por 2 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o un múltiplo de 7.
8	Cuando sus 3 últimos dígitos de la derecha son 0 o forman un múltiplo de 8.
9	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9.
10	Si el último dígito es 0.
11	Si el valor absoluto de la diferencia entre la suma de los dígitos en posición par y la suma de los dígitos en posición impar es 0 o múltiplo de 11.
13	Si al multiplicar el último dígito por 9 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 13.
17	Si al multiplicar el último dígito por 5 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 17.
19	Si al multiplicar el último dígito por 17 y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es 0 o múltiplo de 19.

Ejemplo 1.6

- ✓ 20, 12, 114, 336, 468 son divisibles entre 2, ya que terminan en 0, 2, 4, 6 y 8 respectivamente.
- ✓ 51 es divisible entre 3, ya que 5+1 = 6 y 6 es múltiplo de 3.
- ✓ 486 es divisible entre 3, ya que 4+8+6 = 18 y 18 es múltiplo de 3.
- ✓ 900 es divisible entre 4, porque termina en doble 0.
- ✓ 628 es divisible entre 4, porque 28 es múltiplo de 4.
- ✓ 5,215 y 340 son divisibles entre 5, ya que terminan en 5 y 0 respectivamente.
- ✓ 216 es divisibles entre 2, ya que termina en 6 y es divisible entre 3, porque la suma de sus dígitos es múltiplo de 3. Por tanto, 216 es divisible en 6.
- ✓ 900 es divisible entre 6, ya que es divisible entre 2 y 3.
- ✓ 315 es divisible entre 7, ya que $5x2 = 10$ y $31 - 10 = 21$ y 21 es múltiplo de 7.
- ✓ 147 es divisible entre 7, porque $7x2 = 14$ y $14 - 14 = 0$.
- ✓ 6,000 es divisible entre 8, ya que sus últimos 3 dígitos son 0.
- ✓ 3,160 es divisible entre 8, porque los 3 últimos dígitos, 160, forman un múltiplo de 8.
- ✓ 1,233 es divisible entre 9, ya que $1 + 2 + 3 + 3 = 9$, y 9 es múltiplo de 9.
- ✓ 6,786 es divisible entre 9, ya que $6 + 7 + 8 + 6 = 27$, y 27 es múltiplo de 9.
- ✓ 360 es divisible entre 10, porque su último dígito es 0.
- ✓ 2,500 es divisible entre 10, ya que termina en 0.
- ✓ 1,364 es divisible entre 11, ya que $|(3 + 4) - (1 + 6)| = |7 - 7| = |0| = 0$
- ✓ 82,918 es divisible entre 11, porque $|(2 + 1) - (8 + 9 + 8)| = |3 - 25| = |-22| = 22$, y 22 es múltiplo de 11.
- ✓ 273 es divisible entre 13, ya que $27 - (3x9) = 27 - 27 = 0$
- ✓ 442 es divisible entre 13, porque $44 - (2x9) = 44 - 18 = 26$ y 26 es múltiplo de 13.
- ✓ 357 es divisible entre 17, ya que $35 - (7x5) = 35 - 35 = 0$.
- ✓ 493 es divisible entre 17, porque $49 - (3x5) = 49 - 15 = 34$, y 34 es múltiplo de 17.
- ✓ 342 es divisible entre 19, ya que $34 - (2x17) = 34 - 34 = 0$.
- ✓ 1,045 es divisible entre 19, porque $104 - (5x17) = 104 - 85 = 19$, y 19 es múltiplo de 19.

Actividades de aprendizaje 1.1.

a) - Resuelve las siguientes operaciones.

1) (3)+(12)
2) -(-15)-(-9)
3) (15)+(-8)
4) (-6)-(-5)
5) (-9)+(-1)-(-10)
6) -(-24)+(-13)-(9)
7) 9-(-6)+(-12)
8) 9-(5)+(-3)-(11)
9) (-3-9)-(8+7)
10) (9+5)-(8-11)-19
11) -(5-7)+(16+3)-(4+7)
12) 1-(-3-2+8)+(2+3+1)
13) $-5+\{4+[3-(4-8)+(-5-10)]\}$
14) $\{9-[2-(1-5)]\}-[4-(5-4)+(-5)]$
15) $12-[(6-4)+(8-15)]-[4-(3+2)-(1-7)]$
16) $-[-8+(4-7)+(2-5-3)]+[(6-3)-(2-5-6)-12]$

b) De los siguientes números:

1) 105, 243, 73, 2 457, 3 589, ¿cuáles son divisibles entre 3?
2) 800, 112, 324, 1 426, 13 564, ¿cuáles son divisibles entre 4?
3) 105, 3 176, 8 910, 34 615, 217 583, ¿cuáles son divisibles entre 5?
4) 80, 78, 314, 768, 1 470, ¿cuáles son divisibles entre 6?
5) 175, 157, 576, 1 645, 3 528, ¿cuáles son divisibles entre 7?
6) 700, 3 128, 5 024, 9 000, 10 018, ¿cuáles son divisibles entre 8?
7) 225, 349, 1 008, 2 925, 23 619, ¿cuáles son divisibles entre 9?
8) 66, 111, 253, 935, 540, ¿cuáles son divisibles entre 11?
9) 195, 315, 540, 713, 1 105, ¿cuáles son divisibles entre 13?
10) 1 007, 1 062, 380, 719, 1 596, ¿cuáles son divisibles entre 19?

1.3 Números primos.

Un número primo sólo es divisible entre sí mismo y la unidad. El 1, por definición, no es primo.

Ejemplo 1.7

- ✓ 7 es número primo porque sólo es divisible entre sí mismo y la unidad.
- ✓ 15 no es número primo, ya que además de ser divisible entre sí mismo y la unidad, también los es entre 3 y 5.

Para obtener los primeros n números primos de los números naturales se puede utilizar la criba de Eratóstenes, la cual consiste en hacer una tabla con los números de 1 hasta n.

El procedimiento es señalar con un paréntesis los números que sean primos y tachar los que no lo sean. Se empieza por tachar el 1 y escribir entre paréntesis el 2, a continuación, se tachan los múltiplos de 2, posteriormente se busca el primer número no tachado, en ese caso (3), se pone entre paréntesis y se tachan todos sus múltiplos. El procedimiento se sigue hasta tener marcados tos los números.

~~1~~	**(2)**	**(3)**	~~4~~	**(5)**	~~6~~	**(7)**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
(11)	~~12~~	**(13)**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**(17)**	~~18~~	**(19)**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**(23)**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**(29)**	~~30~~
~~(31)~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**(37)**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
(41)	~~42~~	**(43)**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**(47)**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**(53)**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**(59)**	~~60~~
(61)	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**(67)**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
(71)	~~72~~	**(73)**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**(79)**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**(83)**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**(89)**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**(97)**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

CRIBA DE ERATÓSTENES

Por tanto, los números primos entre 1 y 100 son:

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}$$

1.4 Descomposición de un número en sus factores primos.

La descomposición de un número en sus factores primos es su expresión como el producto de sus factores primos. Para obtenerlo, se divide el número entre el menor divisor primo posible, el cociente que se obtiene se vuelve a dividir entre el menor divisor primo posible, y así hasta que el último cociente sea 1, este procedimiento también se conoce como factorización completa de un número.

Ejemplo 1.8

a) Expresa 144 como el producto de sus factores primos.

Solución.

Se divide 144 entre 2, el cociente 72, se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente.

$144 \div 2 = 72$	144	2
$72 \div 2 = 72$	72	2
$36 \div 2 = 72$	36	2
$18 \div 2 = 72$	18	2
$9 \div 2 = 72$	9	3
$3 \div 2 = 72$	3	3
	1	

Por tanto, $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

b) Expresa 105 como el producto de sus factores primos.

Solución.

105 se divide 144 entre 3 y se continúa con el procedimiento.

$105 \div 3 = 35$	105	3
$35 \div 5 = 7$	35	5
$7 \div 7 = 1$	7	7
	1	

Por consiguiente, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

c) Encuentra la factorización completa de 294.

Solución.

204 se divide entre 2 y se continúa con el procedimiento.

$294 \div 2 = 147$		294	2
$147 \div 3 = 49$		147	3
$49 \div 7 = 7$		49	7
$7 \div 7 = 1$		7	7
		1	

Entonces, la factorización completa de 294 es $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

1.5 Máximo común divisor (MCD).

Es el mayor de los divisores en común de 2 o más números.

Ejemplo 1.9

Los divisores de 18 y 24 son:

Solución.

Divisores de 18:	***1,***	***2,***	***3,***		***6,***		9,		18.
Divisores de 24:	***1,***	***2,***	***3,***	4,	***6,***	8,		12,	24.

Los divisores comunes son: 1, 2, 3, 6, el mayor de los divisores en común es el 6.

Por tanto, el máximo común divisor de 18 y 24 es 6.

Para calcular el MCD de varios números se descomponen simultáneamente en sus factores primos, hasta que ya no tengan un divisor primo en común. Cuando los números sólo tienen a la unidad como común, los números reciben el nombre de “primos relativos”.

Ejemplo 1.10

a) Encuentra el máximo común divisor de 48, 36 y 60.

Solución.

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

48	36	60	2
24	18	30	2
12	9	15	3
4	3	5	

4, 3 y 5, no tienen divisores primos en común, los números primos obtenidos se multiplican y el producto es el resultado.

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 48, 36 y 60 es 12.

b) Determina el MCD (72,180).

Solución.

Se realiza la descomposición de 72 y 180, en sus factores primos.

72	180	2
36	90	2
18	45	3
6	15	3
2	5	

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

Por tanto, el MCD (72,180)=36.

c) Calcula el MCD (11,23).

Solución.

Los números sólo tienen a la unidad como común divisor, lo cual quiere decir que 11 y 23 son números relativos.

Por consiguiente, el MCD de (11,23) = 1

d) Encuentra el máximo común divisor de 234, 390 y 546.

Solución.

Se descomponen simultáneamente en factores primos.

234	390	546	2
117	195	273	3
39	65	91	13
3	5	7	

$$2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$$

Por consiguiente, el máximo común divisor de 234, 390 y 546 es 78.

1.6 Mínimo común múltiplo (mcm).

El mínimo común múltiplo es el menor de todos los múltiplos comunes de 2 o más números.

Al obtener los múltiplos de 4 y 6 se obtiene:

Múltiplos de 4:	4,	8,	***12***,	16,	20,	24,	28,	32,	36, ...
Múltiplos de 6:		6,	***12***,	18,	24,	30,	36,	42,	48, 54, ...

El *menor* de todos los múltiplos en común es el 12.

Por tanto, el mínimo común múltiplo de 4 y 6 es 12.

Para calcular el mcm de varios números se descomponen simultáneamente en factores primos hasta que los cocientes sean 1, si alguno de los números no es divisible entre el factor dado, se baja y se continua hasta encontrar el factor primo que lo divida.

Ejemplo 1.11

a) Determina el mcm $[28, 42]$

Solución.

Se descomponen ambos números en factores primos.

28	42	2
14	21	2
7	21	3
7	7	7
1	1	

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

Por consiguiente, el mcm $[28{,}42]$ es 84.

b) Determina el mcm $[\mathbf{25, 30, 150}]$

Solución.

Se descomponen los números en factores primos.

25	30	150	2
25	15	75	3
25	5	25	5
5	1	5	5
1	1	1	

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 150$$

Por tanto, el mcm $[25,30,150]$ es 150.

c) Calcula el mínimo común múltiplo de 36, 48 y 60.

Solución.

Se descomponen simultáneamente en factores primos y los números que resultan se multiplican.

36	48	60	2
18	24	30	2
9	12	15	2
9	6	15	2
9	3	15	3
3	1	5	3
1	1	5	5
1	1	1	

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720$$

Entonces el mcm de 36, 48 y 60 es 720.

Actividades de aprendizaje 1.2.

a) - Realiza la descomposición en sus factores primos de los siguientes números:

1) 72	2) 96	3) 225	4) 576	5) 945
6) 210	7) 840	8) 2 310	9) 3 675	10) 2 376
11) 7 020	12) 29 400	13) 30 240	14) 16 200	15) 30 030

b) - Calcula el MCD de los siguientes números.

1) 108 y 72	2) 270 y 900	3) 243 y 125	4) 60, 72 y 150
5) 27, 25 y 28	6) 80, 675 y 900	7) 216, 300 y 720	8) 126, 210 y 392
9) 308, 1 617 y 1 925	10) 572, 4 719 y 7 865		

c) - Calcula el mcm de los siguientes números.

1) 108 y 72	2) 18 y 45	3) 27 y 16	4) 36, 20 y 90
5) 45, 54 y 60	6) 28, 35 y 63	7) 20, 30 y 50	8) 720, 600 y 540
9) 220, 275 y 1 925	10) 605, 1 925 y 2 695		

1.7 Problemas y ejercicios de aplicación.

a) En una reunión de academia del área de matemáticas se repartieron 18 bocadillos, 24 vasos de refresco y 12 rebanadas de pastel, ¿cuántos profesores asistieron a la reunión y que cantidad de bocadillos, vasos de refresco y rebanadas de pastel recibió cada uno?

Solución.

Se calcula el máximo común divisor de 18, 24 y 12.

$$\begin{array}{ccc|c} 18 & 24 & 12 & 2 \\ \hline 9 & 12 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & \end{array}$$

MCD (18, 24, 12)$= 2 \cdot 3 = 6$

Por consiguiente, a la reunión de academia asistieron 6 profesores y a cada uno le tocó 3 bocadillos, 4 vasos de refresco y 2 rebanadas de pastel.

b) Tres escuelas deciden hacer una colecta de dinero entre sus alumnos para donar a varias instituciones de beneficencia. Si la primera junta 120 mil, la segunda 280 mil y la tercera 360 mil, ¿cuál es la mayor cantidad que recibirá cada institución de tal manera que sea la misma y cuántas instituciones podrán ser beneficiadas?

Solución.

Se calcula el máximo común divisor de 120, 280 y 360.

120	280	360	2
60	140	180	2
30	70	90	2
15	35	45	5
3	7	9	

MCD $(120, 280, 360) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$

Cada institución recibirá 40 mil pesos y el número de instituciones beneficiadas será la suma de los residuos $3 + 7 + 9 = 19$.

Por tanto, 19 son las instituciones beneficiadas y cada una recibirá $40,000.

c) Al hacer el corte del día en un restaurante, el administrador hace 3 rollos de billetes de la misma denominación, en el primero hay $1,350, en el segundo $1,700 y en el tercero $3,550, ¿Cuántos billetes hay en cada rollo y de qué denominación son?

Solución.

Se calcula el máximo común divisor de 1 350, 1 700 y 3 550.

1,350	1,700	3,550	2
675	850	1,775	5
135	170	355	5
27	34	71	

MCD $(1\,350, 1\,700, 3\,350) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

La denominación de cada billete es de $50, en el primer rollo hay 27 billetes, en el segundo 34 y en el tercero 71.

d) Una persona viaja a la Ciudad de México cada 12 días, otra lo hace cada 20 días y una tercera cada 6 días. Si hoy han coincidido en estar las 3 en la ciudad, ¿dentro de cuántos días, como mínimo, volverán a coincidir?

Solución.

Se calcula el mínimo común múltiplo de 12, 20 y 6.

12	20	6	2
6	10	3	2
3	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

$\text{mcm}\ (12,20,6) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

Por tanto, el mínimo de días que transcurrirán para que las 3 personas coincidan en la Ciudad de México es de 60 días.

e) Un médico receta a un paciente tomar una pastilla cada 6 horas y un jarabe cada 8 horas. Si al iniciar el tratamiento toma la pastilla y el jarabe a la misma hora, ¿después de cuántas horas volverá a tomar ambos medicamentos al mismo tiempo?

Solución.

Se calcula el mínimo común múltiplo de 6, y 8.

6	8	2
3	4	2
3	2	2
3	1	3
1	1	

$\text{mcm}\ (6,8) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

Entonces transcurrirán 24 horas para que el paciente tome los medicamentos juntos.

Actividades de aprendizaje 1.3.

Resuelve las siguientes aplicaciones.

1) Tres cajas contienen, cada una, 12 kilogramos de carne de res, 18 de carne de cerdo y 24 de carne de pollo. La carne de cada caja está contenida en bolsas del mismo tamaño y con la máxima cantidad de carne posible, ¿Cuánto pesa cada bolsa y cuántas hay por caja?

2) Gerardo tiene un anuncio luminoso con focos de color rojo, amarillo y verde, de tal manera que los focos rojos encienden cada 10 segundos, los amarillos cada 6 y los verdes cada 15, si al probar el anuncio encienden todos los focos a la vez, ¿Después de cuántos segundos volverán a encender juntos?

3) Un ebanista quiere cortar en cuadros lo más grande posible una plancha de madera de 300 cm de largo y 80 cm de ancho, ¿Cuál debe ser la longitud de los lados de cada cuadro?

4) Un ciclista da una vuelta a una pista en 6 minutos, mientras que otro tarda 4 minutos. Si ambos inician sus recorridos juntos, ¿Después de qué tiempo volverán a encontrarse y cuántas vueltas habrán dado cada uno?

5) Una llave vierte 4 litros de agua por minuto, otra 3 y una tercera, 8. ¿Cuál es la cantidad menor de litros que puede tener un pozo para que se llene en un número exacto de minutos por cualquiera de las 3 llaves?

6) Tres rollos de tela de 30, 48 y 72 metros de largo se quieren cortar para hacer banderas con pedazos y de mayor longitud, ¿Cuál será el largo de cada pedazo?

7) Un parque de diversiones quiere construir balsas con 3 troncos de palmera, los cuales miden 15, 9 y 6 metros, ¿Cuánto debe medir los pedazos de tronco si tienen que ser del mismo tamaño?, ¿Cuántos pedazos de troncos saldrán?

8) El abuelo Eduardo da dinero a 3 de sus hijos para que la repartan a los nietos de manera equitativa. A su hijo Rubén le da \$5,000, a su hijo Anselmo le da \$6,000, mientras que a Horacio sólo \$3,000, ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que podrán darle a sus hijos y cuántos nietos tiene Eduardo?

9) Fabián tiene un reloj que da una señal cada 18 minutos, otro que da una señal cada 12 minutos y un tercero cada 42 minutos. A las 11 de la mañana los 3 relojes han coincidido en dar una señal, ¿Cuántos minutos como mínimo han de pasar para que vuelvan a coincidir?, ¿A qué hora volverán a dar la señal otra vez juntos?

10) Daniel y Omar tienen 60 canicas azules, 45 verde y 90 amarillas; quieren hacer costalitos iguales con el número mayor de canicas sin que sobren, ¿Cuántos costalitos pueden hacer y cuántas canicas tendrá cada uno?

11) Ricardo tiene en su papelería los lapiceros en bolsas. En la caja "A" tiene bolsitas de 30 lapiceros cada una y no sobran, en la caja "B" tiene bolsitas de 25 lapiceros cada una y tampoco sobran. El número de lapiceros que hay en la caja "A" es igual al que hay en la caja "B", ¿Cuántos lapiceros como mínimo hay en cada caja?

12) Rosa tiene cubos de color lila de 8 cm de arista y de color rojo de 6 cm de arista. Ella quiere apilar los cubos en 2 columnas, una de cubos de color lila y otra de color rojo, desea conseguir que ambas columnas tengan la misma altura, ¿Cuántos cubos, como mínimo, tiene que apilar de cada color?

13) Tres amigos pasean en bicicleta por un camino que rodea un lago, para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 10 minutos, otro tarda 15 y el tercero, 18 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los 3 pasen simultáneamente por el punto de partida, ¿Cuánto tiempo duró el paseo?, ¿Cuántas vueltas dio cada uno?

14) En 1994 se realizaron elecciones para presidente y para jefe de gobierno, el periodo presidencial es de 6 años y el de jefe de gobierno de 4. ¿En qué año volverán a coincidir las elecciones?

15) El piso de una habitación tiene 425 cm de largo por 275 cm de ancho, si se desea poner el menor número de mosaicos cuadrados de mármol. ¿Cuáles serán las dimensiones máximas de cada mosaico?, ¿Cuántos mosaicos se necesitan?

Capítulo 2

NÚMEROS RACIONALES

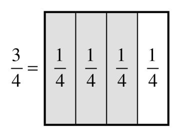
2.1 Fracción Común

Si a y b son números enteros, y b es diferente de cero, se llama fracción común a la expresión $\frac{a}{b}$, donde a recibe el nombre de numerador y b el de denominador. En una fracción común el denominador indica el número de partes iguales en que se divide la unidad y el numerador indica el número de partes que se toman de la unidad.

Ejemplo 2.1

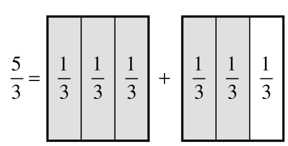
a) La fracción $\frac{3}{4}$, indica que la unidad se divide en 4 partes iguales, de las cuales se toman únicamente 3, la representación gráfica de esta fracción es:

b)



La parte sombreada de la figura representa al numerador.

c) La fracción $\frac{5}{3}$ indica que la unidad se divide en 3 partes iguales, de las cuales se deben tomar 5, lo cual no es posible. Por lo tanto, se toman 2 unidades y se dividen en 3 partes iguales cada una, de la primera unidad se toman las 3 partes y de la segunda únicamente 2 para completar las 5 partes indicadas en el numerador.



Otra manera de representar la fracción $\frac{5}{3}$ es con un número formado por una parte entera y una parte fraccionaria $1\frac{2}{3}$, este tipo ***de fracciones reciben el nombre de mixtas***.

Ejemplo 2.2

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

En la familia que forman 3 hombres y 4 mujeres, ¿Qué fracción de la familia representan las mujeres?

Solución

En este ejemplo la unidad la representa la familia, que a su vez está formada por 7 miembros $(3+4=7)$, la fracción de la familia que representan las mujeres es el número de ellas dividida entre el total de miembros. Por lo tanto, la fracción es igual a $\frac{4}{7}$.

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES.

Las fracciones se pueden clasificar de la siguiente manera:

- ✓ ***Fracciones propias.-*** Son aquellas que tienen el numerador menor que el denominador. Por ejemplo $\frac{3}{7}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{5}, \frac{15}{32}$.
- ✓ ***Fracciones impropias.-*** Son aquellas cuyo numerador es mayor o igual que el denominador. Por ejemplo $\frac{7}{4}, \frac{3}{1}, -\frac{12}{5}, \frac{16}{16}$.
- ✓ ***Fracciones mixtas.-*** Son aquellas formadas por una parte entera y una parte fraccionaria.

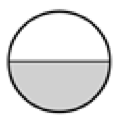
  Por ejemplo $2\frac{3}{7},\ 5\frac{4}{9}, -7\ \frac{4}{5},\ 2\frac{15}{32}$

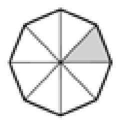
Actividades de aprendizaje 2.1.

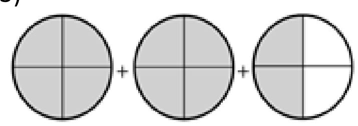
a) ***Representa gráficamente las siguientes fracciones:***

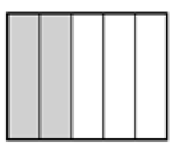
1.- $\frac{3}{8}$ 2.- $\frac{1}{4}$ 3.- $\frac{3}{5}$ 4.- $\frac{7}{6}$ 5.- $\frac{6}{2}$ 6.- $\frac{9}{4}$

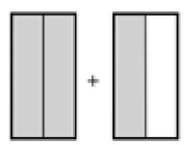
b) ***Indica la fracción que representa la parte sombreada de las figuras.***

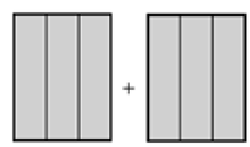
1)


2)


3)


4)


5)


6)


c) ***Resuelve los siguientes problemas:***

1) Una caja tiene 9 pelotas verdes y 5 azules, ¿qué porción de las pelotas que hay en la caja son azules?

2) ¿Qué fracción del día ha transcurrido cuando un reloj marca las 6:00 p.m.?

3) En una caja hay 40 listones rojos y 60 de color amarillo, ¿qué fracción del total de éstos representan los listones rojos y los amarillos?

4) Un obrero trabaja diariamente jornadas de 8 horas, ¿qué fracción del día ocupa para realizar sus otras actividades?

d) Identifica las fracciones propias, impropias o mixtas:

1.- $\frac{7}{8}$	2.- $\frac{8}{6}$	3.- $\frac{9}{12}$	4. $-\frac{12}{16}$
5.- $\frac{5}{5}$	6.- $\frac{9}{24}$	7.- $-\frac{16}{9}$	8.- $\frac{2}{15}$
9.- $\frac{32}{17}$	10.- $\frac{53}{7}$	11.- $\frac{38}{45}$	12.- $\frac{345}{87}$
13.- $3\frac{42}{87}$	14.- $\frac{345}{435}$	15.- $\frac{229}{228}$	16.- $-\frac{213}{1028}$

2.2 Conversión de fracciones impropias a mixtas.

Para realizar la conversión de una fracción impropia a mixta se efectúa la división del numerador entre el denominador, el cociente es la parte entera, el residuo es el numerador de la fracción y el divisor es el denominador.

Ejemplo 2.3

a) Convierte a fracción mixta $\frac{43}{6}$.

Solución

Se efectúa la división:

$$\begin{array}{r} 7 \longleftarrow \text{parte entera} \\ \text{denominador} \longrightarrow 6\overline{)43} \qquad\qquad \\ 1 \longleftarrow \text{numerador} \end{array}$$

Por lo tanto, la fracción $\frac{43}{6}$ en forma mixta es $7\frac{1}{6}$.

b) Exprese en fracción mixta $\frac{125}{12}$.

Solución

Se realiza el cociente:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 12\overline{)125} \\ 005 \end{array}$$

Se obtiene que $\frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$

2.3 Conversión de fracciones mixtas a impropias.

Para convertir una fracción mixta a impropia se multiplica la parte entera de la fracción mixta por el denominador de la parte fraccionaria y al producto se le suma el numerador.

Ejemplo 2.4

a) Convierte a fracción impropia $2\frac{3}{5}$

Solución

Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene:

$$2\frac{3}{5} = \frac{(2x5)+3}{5} = \frac{10+3}{5} = \frac{13}{5}$$

Por consiguiente $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

b) La fracción impropia del $1\frac{7}{9}$ ***es igual a:***

Solución

Se realiza el procedimiento para obtener:

$$1\frac{7}{9} = \frac{(1x9)+7}{9} = \frac{9+7}{9} = \frac{16}{9}$$

Por tanto $1\frac{7}{9} = \frac{16}{9}$

2.4 Fracciones equivalentes

Son aquellas que se expresan de manera diferente, pero representan la misma cantidad. Para averiguar si dos fracciones son equivalentes se efectúa la multiplicación del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, y el resultado debe ser igual a la multiplicación del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

Ejemplo 2.5

a) ¿Son equivalentes las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$?

Solución

Se efectúan las multiplicaciones indicadas y se comparan los resultados:

$$(3)(20) \;\; y \;\; (4)(15)$$

$$60 = 60$$

Por tanto, las fracciones son equivalentes.

b) ¿Son equivalentes las fracciones $1\frac{1}{4}$ y $\frac{30}{24}$?

Solución

Se convierte la fracción mixta en fracción impropia $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ y entonces para comparar $\frac{5}{4}$ con $\frac{30}{24}$ se realizan los productos:

(5)(24)=120 y (4)(30)=120; por lo que, 120=120. Las fracciones, por consiguiente, son equivalentes.

Las fracciones cumplen las siguientes propiedades:

- ✓ El valor de una fracción no se altera al multiplicar su numerador y denominador por un mismo número.
- ✓ El valor de una fracción no se altera cuando al numerador y denominador se les divide entre el mismo número. A este procedimiento se le conoce como "simplificación de una fracción".

Ejemplo 2.6

a) *Al multiplicar por 2 al numerador y denominador de la fracción $\frac{6}{7}$ se obtiene una fracción equivalente:*

$$\frac{6}{7} = \frac{6 \times 2}{7 \times 2} = \frac{12}{14}$$

b) Si al numerador y denominador de la fracción $\frac{5}{3}$ se les multiplica por 4, se obtiene la fracción equivalente $\frac{20}{12}$.

c) Simplifica la fracción $\frac{12}{14}$

Solución

Para simplificar la fracción $\frac{12}{14}$, se debe dividir al numerador y denominador entre 2 que es el máximo común divisor de 12 y 14.

$$\frac{12}{14} = \frac{12 \div 2}{14 \div 2} = \frac{6}{7}$$

Por tanto, $\frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

d) ¿Cuál es la fracción que resulta al simplificar $\frac{36}{24}$?

Solución

Otra forma de simplificar una fracción es dividir al numerador y al denominador entre un número primo, este proceso se realiza hasta que ya no exista un divisor primo común.

$$\frac{36}{24} = \frac{36 \div 2}{24 \div 2} = \frac{18}{12} = \frac{18 \div 2}{12 \div 2} = \frac{9}{6} = \frac{9 \div 3}{6 \div 3} = \frac{3}{2}$$

Por consiguiente $\frac{36}{24} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

2.5· Ubicación de fracciones en la recta numérica.

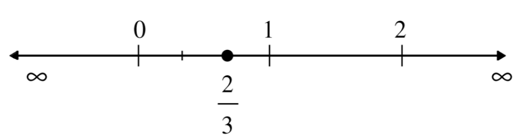
Para ubicar la fracción $\frac{a}{b}$ en la recta numérica, se divide cada unidad en el número de partes que indica el denominador b y se toman las partes que indica el numerador a.

Ejemplo 2.7

a) Localiza en la recta numérica el número $\frac{2}{3}$.

Solución

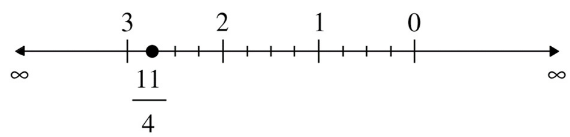
Se divide la mitad en 3 partes iguales y se toman 2.



b) Grafica la fracción -2$\frac{3}{4}$ en la recta numérica.

Solución

Se convierte la fracción mixta a fracción impropia $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$, ahora se divide en 4 partes iguales a las unidades que se encuentran a la izquierda del 0 y se toman 11 de esas divisiones.



Actividades de aprendizaje 2.2.

a) Convierte las siguientes fracciones impropias a fracciones mixtas.

1) $\frac{4}{3}$	2) $\frac{7}{5}$	3) $\frac{3}{2}$	4) $\frac{13}{4}$	5) $\frac{12}{3}$	6) $\frac{13}{8}$
7) $\frac{41}{6}$	8) $\frac{18}{3}$	9) $\frac{27}{7}$	10) $\frac{36}{13}$	11) $\frac{28}{13}$	12) $\frac{25}{12}$
13) $\frac{19}{18}$	14) $\frac{45}{16}$	15) $\frac{131}{40}$	16) $\frac{488}{64}$	17) $\frac{539}{105}$	18) $\frac{1258}{305}$

b) Convierte las siguientes fracciones mixtas en fracciones impropias

1) $3\frac{2}{5}$	2) $1\frac{2}{9}$	3) $4\frac{2}{7}$	4) $5\frac{4}{6}$	5) $7\frac{2}{3}$	6) $8\frac{3}{4}$
7) $1\frac{9}{10}$	8) $2\frac{8}{13}$	9) $5\frac{3}{16}$	10) $7\frac{6}{19}$	11) $12\frac{3}{10}$	12) $18\frac{2}{30}$
13) $15\frac{19}{20}$	14) $23\frac{1}{12}$	15) $36\frac{3}{14}$	16) $50\frac{4}{7}$	17) $121\frac{3}{5}$	18) $223\frac{1}{7}$

c) Indica si las siguientes fracciones son equivalentes.

1) $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ 2) $\frac{3}{8}$ y $\frac{48}{17}$ 3) $\frac{1}{6}$ y $\frac{12}{72}$ 4) $\frac{4}{9}$ y $\frac{28}{72}$

5) $\frac{18}{24}$ y $\frac{6}{8}$ 6) $\frac{80}{15}$ y 6 7) $1\frac{3}{8}$ y $\frac{66}{48}$ 8) $\frac{9}{7}$ y $1\frac{9}{35}$

9) $\frac{7}{4}$ y $\frac{18}{24}$ 10) $1\frac{1}{3}$ y $1\frac{29}{27}$ 11) $\frac{13}{4}$ y $3\frac{3}{4}$ 12) 6 y $5\frac{7}{8}$

d) Simplifica las siguientes fracciones:

1) $\frac{20}{24}$ 2) $\frac{18}{12}$ 3) $\frac{9}{12}$ 4) $\frac{28}{42}$ 5) $\frac{25}{10}$

6) $\frac{12}{60}$ 7) $\frac{90}{200}$ 8) $\frac{42}{48}$ 9) $\frac{132}{165}$ 10) $\frac{245}{70}$

e) Grafica en la recta numérica las siguientes fracciones:

1) $\frac{5}{8}$ 2) $-\frac{9}{4}$ 3) $-\frac{2}{6}$ 4) $\frac{9}{5}$ 5) $\frac{5}{9}$

6) $\frac{8}{12}$ 7) $1\frac{1}{5}$ 8) $-2\frac{1}{3}$ 9) $-1\frac{2}{6}$ 10) $2\frac{5}{10}$

2.5 Suma y resta de fracciones.

Para realizar la suma o resta de fracciones debemos identificar dos casos.

- ✓ Fracciones con denominadores diferentes.
- ✓ Fracciones con denominadores iguales.

Cada uno de los casos los resolveremos de manera diferente.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR.

Para el caso en el cual las fracciones tienes el mismo denominador se suma o restan los numeradores y se escribe el denominador en común.

Ejemplo 2.8

a) Efectúa la operación $\boldsymbol{\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}}$

Solución

Se suman los numeradores, el resultado tiene como denominador 4 y la fracción resultante se simplifica.

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+2+1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

Por tanto, el resultado de la operación es $\frac{3}{2}$.

b) Efectúa la siguiente operación $\boldsymbol{\frac{7}{9}-\frac{5}{9}}$

Solución.

El denominador de las fracciones es el mismo, por lo tanto, se restan únicamente los numeradores y el resultado tiene el mismo denominador.

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{7-5}{9}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$

c) ***¿Cuál es el resultado de*** $\mathbf{1\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\,\frac{1}{5}}$

Solución.

Se convierten las fracciones mixtas en fracciones impropias y se efectúan las operaciones.

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\frac{1}{5}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}-\frac{11}{5}=\frac{8+4-11}{5}=\frac{1}{5}$$

El resultado es $\frac{1}{5}$.

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR.

Se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, también conocido como común denominador, éste se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador. Los números que resultan se suman o se restan para obtener el resultado final.

Ejemplo 2.9

a) Efectúa $\mathbf{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}}$

Solución.

El mínimo común múltiplo de los denominadores es 6; el mcm obtenido se divide entre cada uno de los denominadores.

$$\frac{6}{2}=3 \qquad \frac{6}{3}=2 \qquad \frac{6}{6}=1$$

El resultado se multiplica por su respectivo numerador, posteriormente se suman los resultados de los productos.

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{(3)(3)+(2)(1)+(1)(2)}{6}=\frac{9+2+2}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

Por tanto, el resultado de la suma es $\frac{13}{6}\ o\ 2\frac{1}{6}$

b) ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{2} - \frac{1}{5}$***?***

Solución.

El común denominador de 2 y 5 es 10, se efectúan las operaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}$$

c) Realiza $3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Solución.

Se convierten las fracciones mixtas a fracciones impropias, en seguida se obtiene el mínimo común múltiplos de los denominadores y se realiza el procedimiento para obtener el resultado.

$$3\frac{1}{6} - 1\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19}{6} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = \frac{19-9+2}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.10

a) Para preparar un pastel se emplean los siguientes ingredientes: $1\frac{1}{2}$ ***kg de harina,*** $\frac{1}{2}$ ***kg de huevo, una taza de leche que equivale a*** $\frac{1}{4}$ ***kg y azúcar*** $\frac{5}{8}$ ***kg. ¿Cuántos kilogramos pesan estos ingredientes?***

Solución.

Se suman los kilogramos de todos los ingredientes y se obtiene:

$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8} = \frac{12+4+2+5}{8} = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$$

Por consiguiente, los ingredientes pesan $2\frac{7}{8}$ kg

b) Miguel perdió $\frac{1}{3}$ ***de su dinero y prestó*** $\frac{1}{4}$ ***¿Qué parte de su dinero le queda?***

Solución

Se suma la porción que perdió con la que prestó y este resultado se resta a la unidad que representa lo que tenía.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \qquad 1 - \frac{7}{12} = \frac{1}{1} - \frac{7}{12} = \frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}$$

Por tanto, a Miguel le sobran $\frac{5}{12}$ de su dinero.

Actividades de aprendizaje 2.3.

a) - Efectúa las siguientes operaciones

1) $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}$ 2) $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ 3) $\frac{4}{9}+\frac{5}{9}+\frac{2}{9}$

4) $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}+\frac{1}{6}$ 5) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$ 6) $\frac{3}{10}+\frac{7}{10}+\frac{1}{10}+\frac{5}{10}$

7) $1\frac{5}{9}+3\frac{1}{9}+\frac{7}{9}$ 8) $\frac{13}{16}+2\frac{9}{16}+4\frac{1}{16}+1\frac{3}{16}$ 9) $1\frac{5}{8}+\frac{13}{8}+2\frac{7}{8}+\frac{6}{8}+\frac{9}{8}$

10) $\frac{12}{5}-\frac{8}{5}$ 11) $\frac{4}{9}-\frac{1}{9}$ 12) $\frac{11}{15}-\frac{7}{15}$

13) $3\frac{1}{3}-\frac{8}{3}$ 14) $1\frac{2}{17}-\frac{14}{17}$ 15) $\frac{4}{6}+\frac{7}{6}-\frac{8}{6}$

16) $\frac{3}{12}-\frac{5}{12}+\frac{10}{12}$ 17) $\frac{3}{20}+\frac{18}{20}-\frac{13}{20}-\frac{4}{20}$ 18) $\frac{7}{9}-\frac{11}{9}+\frac{15}{9}+\frac{6}{9}-\frac{1}{9}$

19) $1\frac{1}{2}+\frac{5}{2}-3\frac{1}{2}$ 20) $2\frac{7}{9}-\frac{4}{9}-\frac{7}{9}$ 21) $1\frac{3}{4}-1\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$

22) $1\frac{3}{5}+7\frac{4}{5}-9\frac{2}{5}$ 23) $3\frac{2}{7}+1\frac{3}{7}-4\frac{3}{7}$ 24) $2\frac{3}{5}+1\frac{1}{5}-2\frac{4}{5}-\frac{2}{5}$

25) $2\frac{1}{8}-\frac{7}{8}-1\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ 26) $\frac{14}{13}-1\frac{7}{13}-\frac{2}{13}+1\frac{9}{13}$ 27) $3\frac{2}{5}+1\frac{1}{5}+\frac{6}{5}-4\frac{4}{5}$

b) Realiza las siguientes operaciones:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 2) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$ 3) $\frac{5}{10}+\frac{3}{2}$

4) $\frac{7}{24}+\frac{11}{30}$ 5) $\frac{8}{26}+\frac{15}{39}$ 6) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

7) $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$

8) $\frac{5}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{18}$

9) $\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}$

10) $\frac{5}{8}-\frac{1}{4}$

11) $\frac{5}{12}-\frac{7}{24}$

12) $\frac{11}{64}-\frac{5}{8}$

13) $\frac{7}{5}+\frac{8}{35}-\frac{9}{21}$

14) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{1}{10}$

15) $\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{11}{12}$

16) $\frac{7}{12}+\frac{3}{8}-\frac{1}{20}$

17) $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}-\frac{3}{20}$

18) $3+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}$

19) $\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}$

20) $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}$

21) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}-\frac{1}{6}-\frac{2}{3}$

22) $3+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}+\frac{7}{2}$

23) $\frac{7}{5}-\frac{1}{2}-\frac{3}{10}-\frac{32}{20}$

24) $\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

25) $4\frac{3}{10}-\frac{3}{5}$

26) $4\frac{1}{2}-6$

27) $\frac{1}{3}-\frac{1}{12}-2\frac{3}{4}$

28) $1\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

29) $4\frac{2}{3}-3\frac{1}{6}+$

30) $7\frac{1}{2}-1\frac{2}{5}+\frac{9}{10}$

31) $6\frac{1}{5}+3\frac{2}{3}-1\frac{1}{4}$

32) $3\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}+1\frac{1}{4}$

33) $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}-1\frac{1}{2}+1\frac{1}{6}$

34) $1\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-2\frac{1}{2}+1\frac{7}{12}$

35) $1\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-2\frac{1}{8}$

36) $1\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+2\frac{7}{12}-4+\frac{1}{3}$

c) Resuelve los siguientes problemas.

1. Juan compró en el supermercado $\frac{1}{2}$ kg de azúcar, $\frac{3}{4}$ kg de harina y 1 kg de huevo, estos productos los colocó en una bolsa, ¿Cuántos kilogramos pesa dicha bolsa?
2. Dos calles tienen las siguientes longitudes: $2\frac{2}{5}\ y\ 1\frac{3}{4}$ de kilómetros, ¿Cuál es la longitud total de ambas?
3. Al nacer un bebé pesó $2\frac{1}{4}$ kilogramos, en su primera visita al pediatra éste informo a los padres que el niño había aumentado $\frac{1}{2}$ kilogramo; en su segunda visita observaron que su aumento fue de $\frac{5}{8}$ de kilogramo. ¿Cuántos kilos pesó el bebé en su última visita al médico?

4. A Joel le pidieron que realizara una tarea de física que consistía en contestar un cuestionario y resolver unos problemas. Se tardo $\frac{3}{4}$ de hora en responder el cuestionario y $2\frac{1}{2}$ para solucionar los problemas, ¿Cuánto tiempo le tomó a Joel terminar toda la tarea?

5. En su dieta mensual una persona debe incluir las siguientes cantidades de carne: la primera semana $\frac{1}{4}$ de kilogramo, la segunda $\frac{3}{8}$ la tercera $\frac{7}{16}$ y la última semana $\frac{1}{2}$ kilogramo. ¿Cuántos kilogramos consumió durante el mes?

6. Tres cuerdas tienen las siguientes longitudes: $3\frac{2}{5}, 2\frac{3}{10}\ y\ 4\frac{1}{2}$ metros, cada una. ¿Cuál es la longitud de las 3 cuerdas juntas?

7. La fachada de una casa se va a pintar de color blanco y azul, si $\frac{5}{12}$ se pinta de color blanco, ¿Qué porción se pintará de color azul?

8. Un ciclista se encuentra en una competencia y ha recorrido $\frac{5}{9}$ de la distancia que debe cubrir para llegar a la meta, ¿Qué fracción de la distancia total le falta por recorrer?

9. Un sastre realiza una compostura a un pantalón cuyo largo originalmente es de 32 pulgadas, si para hacer la valenciana se dobla hacia arriba $1\frac{3}{4}$ de pulgada, ¿de qué largo quedó el pantalón después de la compostura?

10. De una bolsa de 1 kilogramo de azúcar se extrae una porción que equivale a $\frac{3}{8}$ de kilogramo, ¿Cuánta azúcar queda en la bolsa?

11. Un depósito contiene agua hasta $\frac{3}{4}$ partes de su capacidad, si se ocupa una cantidad de agua equivalente a la mitad de la capacidad del depósito, ¿Qué fracción de su máxima capacidad sobra?

12. Enrique vende $\frac{1}{4}$ de terreno de su finca, alquila $\frac{1}{6}$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca siembra?

13. De un rollo de tela se han cortado las siguientes porciones: $\frac{2}{3}\ y\ \frac{1}{6}$ de metro, ¿Qué porción del rollo queda?

14. Luis, Jorge y Adán se organizan para realizar una tarea: Luis se compromete a hacer la mitad y Jorge hará la octava parte, ¿Qué fracción de la tarea le corresponde a Adán?

15. Los $\frac{2}{5}$ de un terreno se venden, $\frac{1}{4}$ del resto se siembra de chile de árbol, ¿Qué parte del terreno sobra?

16. $\frac{3}{10}$ de los alumnos de una escuela están en cuarentena debido a que se encuentran enfermos de sarampión, además $\frac{1}{5}$ de la población escolar llega tarde y las autoridades no les permiten la entrada. ¿Qué porción de alumnos asistió a la escuela?

2.7 Multiplicación de fracciones

Para realizar estas operaciones se multiplican los numeradores y los denominadores. En caso de que existan fracciones mixtas, se debe convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

Ejemplo 2.11

a) ***Efectúa*** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

Solución.

Se aplica el procedimiento descrito y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{2 \times 1}{5 \times 6} = \frac{2}{30} = \frac{2 \div 2}{30 \div 2} = \frac{1}{15}$$

b) ***¿Cuál es el resultado de*** $\mathbf{3}\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}} \times \mathbf{4}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$***?***

Solución.

$$3\frac{2}{4} \times 4\frac{1}{6} = \frac{14}{4} \times \frac{25}{6} = \frac{350}{24} = \frac{350 \div 2}{24 \div 2} = \frac{175}{12} = 14\frac{7}{12}$$

El resultado del producto es $\frac{175}{12}$ o $14\frac{7}{12}$

c) ***Realiza*** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} \times \mathbf{1}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \mathbf{2}$

Solución.

Se convierten las fracciones mixtas a impropia.

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times 1\frac{1}{3} \times 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1}$$

Se realiza la multiplicación y se observa que existen factores iguales en el numerador y denominador, por lo tanto, es recomendable simplificar la expresión para obtener el resultado.

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} = \frac{3 \times 1 \times 4 \times 2}{4 \times 6 \times 3 \times 1} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{1} \times \cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times 6 \times \cancel{3} \times \cancel{1}} = \frac{2}{6}$$

Simplificamos el resultado dividiendo el numerador y denominador entre el mismo número para este caso es 2.

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{6} \times 1\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{6} = \frac{2/2}{6/2} = \frac{1}{3}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{1}{3}$.

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.12

a) En un grupo hay 40 alumnos, de ellos las tres quintas partes son mujeres, ¿cuántas hay en el grupo?

Solución.

Para obtener el total de mujeres del grupo se multiplica el total de alumnos por la fracción que representan las mujeres.

$$40 \times \frac{3}{5} = \frac{40}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{120}{5} = 24\, mujeres$$

b) Se realizó una encuesta para averiguar qué medios informativos se prefieren; de cada 10 personas, 4 prefieren el periódico; si se encuestó a 600 individuos, ¿Cuántas prefieren otros medios?

Solución.

La fracción $\frac{4}{10}$ representa a las personas que prefieren el periódico, por tanto, $\frac{6}{10}$ representa a las personas que prefieren otros medios, entonces, para obtener el número de personas que representa esta última fracción se multiplica por el total de la muestra.

$\frac{6}{10} \times 600 = \frac{6}{10} \times \frac{600}{1} = \frac{360}{10} = 360$ Personas prefieren otros medios.

Actividades de aprendizaje 2.4.

a) Efectúa los siguientes productos.

1) $\frac{2}{5} \times \frac{10}{8}$

2) $\frac{5}{4} \times \frac{2}{7}$

3) $\frac{3}{6} \times \frac{2}{9}$

4) $\frac{3}{4} \times \frac{6}{3}$

5) $\frac{3}{4} \times 2\frac{3}{5}$

6) $3\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}$

7) $1\frac{1}{2} \times 2\frac{5}{7}$

8) $\frac{6}{3} \times 2\frac{1}{2}$

9) $1\frac{3}{5} \times 4\frac{5}{8}$

10) $2\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{5}$

11) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$

12) $\frac{1}{5} \times \frac{9}{4} \times \frac{12}{6}$

13) $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$

14) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$

15) $1\frac{1}{6} \times \frac{12}{7} \times \frac{14}{2}$

16) $\frac{7}{9} \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{14} \times 15$

17) $2\frac{2}{5} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{3} \times 1\frac{3}{5}$

18) $\frac{2}{9} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{14} \times 5$

19) $2\frac{4}{9} \times 2\frac{1}{4} \times 1\frac{3}{11} \times 1\frac{1}{3}$

20) $2 \times 7\frac{3}{5} \times 1\frac{6}{19} \times \frac{3}{4}$

21) $1\frac{1}{2} \times \frac{4}{6} \times 2\frac{2}{5} \times 2\frac{1}{2}$

c) Resuelve los siguientes problemas.

1) Una alberca tiene capacidad para 3 000 litros de agua, si solo se encuentra a tres cuartas partes de su capacidad, ¿cuántos litros tiene?

2) En un estadio de béisbol $\frac{2}{3}$ de los aficionados apoyan el equipo local, si el número de asistentes es de 6300 personas, ¿Cuántas apoyan al equipo visitante?

3) _Un tercio de la población de 2 100 habitantes es afectada por cierto virus, ¿Cuántos habitantes no padecen el virus?

4) Se sabe que los viernes por la noche en el D.F. $\frac{1}{4}$ del total de automovilistas manejan en estado de ebriedad, si se realiza un sondeo entre 600 conductores un viernes por la noche, ¿Cuántos automovilistas se espera que manejen en estado inconveniente?

5) En una caja hay 120 pelotas: verdes, rojas y azules, si las pelotas rojas son la tercera parte del total y azules equipos valen a la sexta parte, ¿Cuántas hay de cada color?

6) El costo de un kilogramo de azúcar es de $8, ¿Cuál es el precio de $3\frac{3}{4}\ kg$?

7) Julián tenía $1 500, si compro libros que le costaron dos quintas partes de su dinero, ¿cuánto le sobro?

8) La velocidad de un automóvil de 100 kilómetros por hora, ¿Qué distancia recorre en un tiempo de $2\frac{3}{4}$ horas?

9) Determina los dos tercios de los tres cuartos de la mitad de 240.

10) En un grupo de 60 alumnos, las dos terceras partes se inclinan por la física, de estos, la mitad quieren ser físicos nucleares y la cuarta parte de ellos desea realizar una maestría en el extranjero. ¿Cuántos alumnos desean estudiar su maestría en otro país?

11) Si a 2 de cada 10 personas les gusta el rock, de una población de 4 500, ¿Cuántas prefieren otros ritmos?

12) La recomendación de un doctor a un enfermo de gripe es que se tome $1\frac{1}{2}$ pastillas de ácido acetilsalicílico (aspirina) durante 4 días cada 8 horas, para contrarrestar los malestares de esta enfermedad infecciosa. Si el paciente sigue cabalmente las indicaciones del doctor, ¿cuántas pastillas de aspirina tomará?

13) Las calorías y los joule en la física son unidades de energía, además, se sabe que una caloría equivale a $\frac{21}{5}$ joules. ¿Cuánta energía en joule habrá en un alimento de 120 calorías?

2.8 División de fracciones.

Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el numerador de la fracción resultante.

Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el producto es el denominador de la fracción resultante.

Para realizar esta operación:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Ejemplo 2.13

1.-Realiza $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5}$

Solución.

Se aplica los pasos y se simplifica el resultado.

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{10 \div 2}{12 \div 2} = \frac{5}{6}$$

Por lo tanto, $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

2.-Determine el resultado de $4\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4}$

Solución.

Se convierten las fracciones mixtas en impropias y se efectúa la división

$$4\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4} = \frac{22}{5} \div \frac{11}{4} = \frac{22 \times 4}{5 \times 11} = \frac{88}{55} = \frac{88 \div 11}{55 \div 11} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$$

Por consiguiente: $4\frac{2}{5} \div 2\frac{3}{4} = 1\frac{3}{5}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN.

Ejemplo 2.14

¿Cuántas bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo se pueden llenar con 20 kilogramos de galleta?

Solución

Se divide los 20 kilogramos entre la capacidad de las bolsas para obtener el número de las que se pueden llenar:

$$20 \div \frac{5}{8} = \frac{20}{\frac{5}{8}} = \frac{\frac{20}{1}}{\frac{5}{8}} = \frac{20 \times 8}{5 \times 1} = \frac{160}{5} = 32$$

Por tanto, con 20 kilos se pueden llenar 32 bolsas de $\frac{5}{8}$ de kilogramo.

Actividades de aprendizaje 2.5.

a) Efectúa las siguientes operaciones.

1) $\frac{1}{6} \div \frac{2}{3}$	2) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$	3) $\frac{6}{8} \div \frac{1}{4}$	4) $\frac{13}{9} \div \frac{4}{3}$
5) $\frac{5}{12} \div \frac{5}{6}$	6) $\frac{7}{8} \div \frac{21}{16}$	7) $\frac{4}{3} \div \frac{5}{30}$	8) $\frac{28}{7} \div \frac{4}{5}$
9) $\frac{4}{6} \div 1\frac{2}{3}$	10) $2\frac{2}{3} \div \frac{4}{15}$	11) $1\frac{4}{5} \div \frac{13}{10}$	12) $\frac{1}{2} \div 3\frac{1}{4}$
13) $\frac{4}{9} \div 8$	14) $3\frac{1}{4} \div 26$	15) $1 \div 1\frac{1}{4}$	16) $34 \div 2\frac{5}{6}$
17) $\frac{11}{9} \div 3\frac{2}{3}$	18) $5\frac{1}{4} \div 1\frac{1}{6}$	19) $5\frac{5}{8} \div 3\frac{3}{4}$	20) $1\frac{11}{13} \div 8$

b) Resuelve los siguientes problemas.

1) En peso aproximado de una pizza familiar es de un kilogramo y si la pizza se divide en 8 porciones iguales, ¿cuánto pesa cada rebanada?

2) ¿Cuántas botellas de tres cuartos de litro se llenan con 60 litros de agua?

3) ¿Cuántas piezas de $2\frac{2}{3}$ de metro de longitud se obtienen de una varilla de $13\frac{1}{3}$ metros de largo?

4) Si una llave vierte $6\frac{1}{3}$ litros de agua por minuto, ¿En cuánto tiempo se llenará un depósito de $88\frac{2}{3}$ litros de capacidad?

5) ¿Cuál es la velocidad por hora de una automóvil que en $2\frac{1}{2}$ horas recorre 120 kilometro?

6) Francisco compró $8\frac{2}{3}$ kilogramos de jamón con \$156, ¿cuál es el costo de un kilogramo?

7) Una familia de 6 integrantes consume diariamente $1\frac{1}{2}$ litros de leche, si todos ingieren la misma cantidad, ¿cuánto toma cada uno?

8) Javier repitió 160 kilogramos de arroz entre un grupo de personas, de tal forma que a cada una le tocaron $6\frac{2}{3}$ kg, ¿cuántas personas eran?

2.9 Operaciones con signos de agrupación

Se realizan las operaciones que se encuentran dentro de un signo de agrupación, posteriormente estos se suprimen como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.15

a) Efectúa $2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$

Solución.

Se efectúan las operaciones que encierran los paréntesis, los resultados se multiplican por las cantidades de fuera y se simplifican para sumarse después y obtener el resultado final.

$$2\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=2\left(\frac{5-2}{4}\right)+3\left(\frac{3-2}{6}\right)$$

$$=2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}$$

$$=\frac{6}{4}+\frac{3}{6}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

El resultado de la operación es 2.

b) ¿Cuál es el resultado de $\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$?

Solución.

Se efectúa la suma, el resultado se simplifica y después se realiza para obtener el resultado de la operación propuesta.

$$\frac{5}{4}\div\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\left(\frac{2+1}{6}\right)$$

$$=\frac{5}{4}\div\left(\frac{3}{6}\right)=\frac{5}{4}\div\frac{1}{2}$$

$$=\frac{5\times 2}{4\times 1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{5}{2}$ o $2\frac{1}{2}$

c) Realiza $\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)$.

Solución.

Se realizan las restas, después la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\left(1\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{7}{6}-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{14-9}{12}\right)\left(\frac{5-2}{10}\right)$$

$$=\left(\frac{5}{12}\right)\left(\frac{3}{10}\right)=\frac{15}{120}=\frac{15\div 15}{120\div 15}=\frac{1}{8}$$

Por lo tanto, el resultado es $\frac{1}{8}$

PROBLEMAS Y EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.16

a) La matrícula de una escuela aumentó $\frac{1}{4}$ con respecto al año pasado. Si había 400 alumnos, ¿cuántos alumnos hay este año?

Solución.

Se obtiene la cuarta parte de 400: $\frac{1}{4}(400)$ y se suma los 400 alumnos del año pasado.

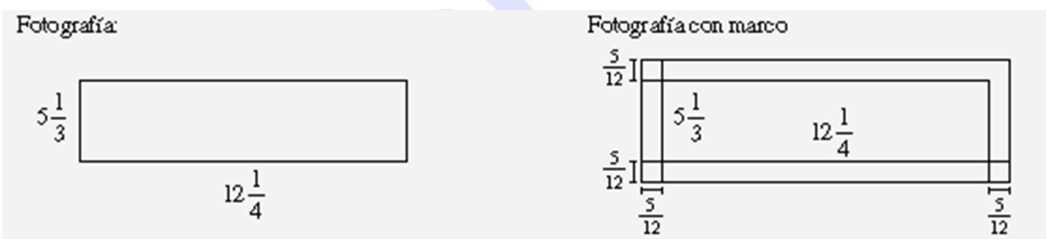
$$\frac{1}{4}(400) + 400 = \frac{400}{4} + 400$$

$$= 100 + 400 = 500$$

Por lo tanto, hay 500 alumnos este año.

b) Una fotografía mide $5\frac{1}{3}$ pulgadas de ancho por $12\frac{1}{4}$ pulgadas de largo. Si esta fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{5}{12}$ pulgadas, ¿cuáles son las dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

Solución.



Entonces las dimensiones son:

$$\text{Ancho: } 5\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right) = \frac{16}{3} + \frac{10}{12} = \frac{16}{3} + \frac{5}{6} = \frac{32+5}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6} \text{ pulgadas}$$

$$\text{Largo:} 12\frac{1}{4} + \left(\frac{5}{12} + \frac{5}{12}\right) = \frac{49}{4} + \frac{10}{12} = \frac{49}{4} + \frac{5}{6} = \frac{147+10}{12} = \frac{157}{12} = 13\frac{1}{12} \text{ pulgadas}$$

2.10 Fracciones complejas

Se llama así a la fracción que está formada por una serie de operaciones subsecuentes con fracciones.

Ejemplo 2.17

a) Efectúa $\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}$

Solución.

Primero se efectúa las operaciones $1-\frac{3}{4}$ y $1+\frac{1}{8}$, sus resultados se dividen y se simplifican para obtener el resultado que se desea.

$$\frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{8}}=\frac{\frac{4-3}{4}}{\frac{8+1}{8}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{8}}=\frac{8\times 1}{9\times 4}=\frac{8}{36}=\frac{8\div 4}{36\div 4}=\frac{2}{9}$$

Por consiguiente, el resultado es $\frac{2}{9}$.

b) ¿Cuál es el resultado de $\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$?

Solución.

Se inicia con la operación $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ y las subsecuentes hasta obtener el resultado.

$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2-1}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$$

Por tanto, el resultado que se busca es $\frac{1}{5}$

Actividades de aprendizaje 2.6.

a) Realiza las siguientes operaciones.

1) $\frac{3}{7}(2) - \frac{5}{14}(4)$

2) $\frac{3}{4}(3) + 1\frac{1}{2}$

3) $\frac{3}{8}(4-2) + \frac{5}{16}(8-4)$

4) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$

5) $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{1}{10} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)$

6) $\left(\frac{7}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - 2\frac{1}{3}\right)$

7) $\left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(3 - 2\frac{1}{2}\right)$

8) $\left(5\frac{1}{10}\right)\left(1 - \frac{12}{17}\right)$

9) $\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{4}{7} - \frac{3}{14}\right)$

10) $\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)$

11) $\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{7}{10}\right) \div \left(\frac{3}{4}\right)$

12) $\left(1\frac{1}{9}\right) \div \left(4 - 2\frac{1}{3}\right)$

13) $\left(\frac{17}{22} + 1\right)\left(2 - \frac{9}{11}\right)$

14) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{8}\right)$

b) Resuelve los siguientes problemas:

1) Se sabe que cuando un fluido se congela aumenta $\frac{1}{12}$ del volumen que ocupaba en su estado líquido, si una botella de agua tiene un volumen de 3,600 mililitros en su estado líquido, ¿cuál será el volumen del mismo fluido en estado sólido?

2) Agustín se ejercita caminando todas las tardes de la semana para mejorar su presión arterial, entre semana camina $\frac{1}{2}$ hora, mientras que al fin de semana camina $\frac{3}{4}$ de hora. ¿Cuánto tiempo invierte Agustín en caminar?

3) Jorge y David deciden juntar parte de sus ahorros para comprar un nuevo juego de video, Jorge aporta $\frac{3}{5}$ de \$2,000 ahorrados, mientras que David decide aportar $\frac{1}{3}$ de \$3,000, ¿cuál fue el costo del juego de video?

4) Roberto divide su sueldo de la siguiente forma, $\frac{1}{3}$ a alimentación, $\frac{1}{2}$ al pago de la renta y servicio y $\frac{1}{6}$ a diversión. Si Roberto percibe en un mes \$12,000, ¿cuánto de dinero designa a cada rubro?

5) En una bodega hay 4 cajas de 20 bolsas de $\frac{1}{2}$ kilogramo de detergente, 6 cajas con 15 bolsas de $\frac{3}{4}$ de kilogramo y 3 cajas con 10 bolsas de un kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de detergente hay en la bodega?

6) En pruebas de manejo se ha detectado que, por efecto del uso del calor, la presión de los neumáticos de un automóvil aumenta $\frac{1}{14}$ con respecto a la presión que tienen, si el automóvil se encuentra estático. ¿Cuál era la presión de unos neumáticos, que después de ser sometidos a una prueba de manejo registraron una presión de 30 $\frac{lb}{in^2}$?

7) Una fotografía mide $6\frac{1}{4}$ pulgadas de ancho por $10\frac{1}{2}$ de largo. Si la fotografía se coloca en un marco que tiene un ancho constante de $\frac{3}{8}$ pulgadas, ¿cuáles son las nuevas dimensiones de la fotografía colocada ya en el marco?

c) **Resuelve las siguientes fracciones complejas:**

1)
$$\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{2}-3}}$$

2)
$$1+\frac{2}{1+\frac{5}{1-\frac{1}{3}}}$$

3)
$$3+\frac{2}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

4)
$$2-\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}$$

5)
$$1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}}$$

6)
$$\frac{\frac{2-\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}+\frac{1+\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}}}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{9}{40}$$

7)

$$\frac{\dfrac{1+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}}{1+\frac{2}{3}}\times\left(10\frac{1}{3}-3\frac{2}{3}\right)$$

8)

$$\frac{\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{6}}+\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}}-\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{10}}}{\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}$$

9)

$$\frac{\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}+\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}}{\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}}}$$

10)

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}}}}$$

11)

$$\frac{\dfrac{3-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}-\dfrac{2-\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}}{3-\frac{1}{2}}\times\left(\frac{3}{4}\div\frac{1}{25}\right)$$

12)

$$\frac{\dfrac{2+\frac{1}{3}}{7}+\dfrac{1-\frac{1}{4}}{3}}{\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}-\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}}}\times\left(\frac{2}{7}\div\frac{4}{19}\right)$$

13)

$$\frac{\dfrac{1+\frac{1}{3}}{1+\dfrac{2}{2-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2-\frac{1}{3}}{1-\dfrac{2}{1+\frac{1}{2}}}}{7+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{7}{6}}}}$$

14)

$$\frac{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+2}}+\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}}$$

15)

$$1-\frac{1}{1+\dfrac{2}{3-\frac{1}{2}}}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}$$

Capítulo 3

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

3.1 Potenciación.

Es la operación en la cual la cantidad llamada base se debe multiplicar por ella misma las veces que lo indique el exponente. De lo anterior se define:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}_{\text{n- veces}}$$

Donde; a es la base y n el exponente.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 3.1

a) Desarrolla 5^2.

Solución.

Al ser exponente 2, la base 5 se debe multiplicar 2 veces ella misma:

$$5^2 = (5)(5) = 25$$

Por tanto $5^2 = 25$

b) ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{2}\right)^3$?

Solución.

La fracción se debe multiplicar 3 veces por ella misma.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

El resultado es $\frac{1}{8}$

c) Desarrolla 3^{-4}

Solución.

Se aplica la definición y luego se desarrolla 3^4 para obtener el resultado.

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{(3)(3)(3)(3)} = \frac{1}{81}$$

Por consiguiente, $3^{-4} = \frac{1}{81}$

<u>Cuando un número negativo se eleva a una potencia par, el resultado es positivo, pero si se eleva a una potencia impar, el resultado es negativo.</u>

d) ¿Cuál es el resultado de $(-6)^4$?

Solución.

La potencia es par, por lo tanto, el resultado es positivo.

$$(-6)^4 = 6^4 = 1\,296$$

e) Efectúa $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

Solución.

El exponente es impar, por consiguiente, el resultado será negativo.

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$$

f) Desarrolla $(-4+1)^2$

Solución.

Se efectúa la operación encerrada en el paréntesis y después se resuelve la potencia para obtener el resultado.

$$(-4+1)^2 = (-3)^2 = 3^2 = 9$$

TEOREMAS

LEYES DE LOS EXPONENTES

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $a^0 = 1$

4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

5) $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplo 3.2

a) Demuestra que se cumple $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2}$ (Teorema 1 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$)

Solución.

Se realiza la potenciación:

$$2^3 \cdot 2^2 = (8)(4) = 32$$

$$2^{3+2} = 2^5 = 32$$

Por lo tanto, se demuestra que $2^3 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$

b) Demuestra que se cumple $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$ (Teorema 2 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$)

Solución.

Se realiza:

$$\frac{3^5}{3^2} = \frac{243}{9} = 27$$

$$3^{5-2} = 3^3 = 27$$

Se observa que ambos resultados son iguales, por lo tanto, se cumple que: $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2}$

c) Demuestre que 7^0=1 (Teorema 3 $a^0 = 1$)

Para esta demostración se emplea arbitrariamente que:

$$1 = \frac{343}{343} = \frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$$

Por consiguiente, $7^0 = 1$

d) Demuestre que $\left(4^3\right)^2 = 4^{(3)(2)}$ (Teorema 4 $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$)

Solución.

Se realiza:

$$(4^3)^2 = (64)^2 = 4\,096$$

Además:

$$4^{(3)(2)} = 4^6 = 4\,096 = 4^{(3)(2)}$$

e) Verifica que se cumple $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot$ (Teorema 5 $(a \cdot b \cdot c)^m = a^m \cdot b^m \cdot c^m$)

Solución.

De $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2$ se realiza el producto dentro del paréntesis y se eleva al cuadrado.

$$(2 \cdot 3 \cdot 5) = 30 \qquad (30)^2 = 900$$

Por otro lado, se realiza $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$.

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$$

Entonces se cumple que $(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

f) Demuestra que se cumple $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$ (Teorema 6 $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Solución.

Primero se eleva $\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16}$$

Por otro lado, se realiza:

$$\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

Entonces se verifica que $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

3.2 Operaciones con exponentes.

Son aquellas que se realizan con la aplicación de los teoremas de los exponentes.

Ejemplo 3.3

a) Realiza la simplificación de $\boldsymbol{(2^3 \cdot 5^{-2})(2^{-2} \cdot 5^4)}$

Solución.

La operación ***es una multiplicación***, entonces los exponentes se suman:

$$(2^3 \cdot 5^{-2})(2^{-2} \cdot 5^4) = 2^{3+(-2)} \cdot 5^{-2+4} = 2^1 \cdot 5^2 = 2 \cdot 25 = 50$$

El resultado es 50.

b) Simplifica la siguiente expresión $\boldsymbol{\frac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}}}$

Solución

Se aplican los teoremas de exponentes:

$$\frac{2^5 \cdot 3^{-4}}{2^3 \cdot 3^{-3}} = 2^{5-3} \cdot 3^{-4-(-3)} = 2^2 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Por tanto, el resultado de la expresión es $\frac{4}{3}$

c) Simplifica la siguiente expresión $\frac{27^2}{9^3}$

Solución.

En este ejercicio el 27 y el 9 se descomponen en factores primos para después aplicar los teoremas y finalmente obtener el resultado:

$$\frac{(3^3)^2}{(3^2)^3} = \frac{3^6}{3^6} = 3^{6-6} = 3^0 = 1$$

d) Simplifica la siguiente expresión $\frac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2}$

Solución.

Se descomponen 6 y 9 en sus factores primos, se simplifica y se obtiene el resultado:

$$\frac{6^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 9^2} = \frac{(2 \cdot 3)^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot (3^2)^2} = \frac{2^3 \cdot 3^3 \cdot 3^2 \cdot}{2^3 \cdot 3^4} = \frac{2^3 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^4} = 2^{3-3} \cdot 3^{5-4} = 2^0 \cdot 3^1 = 3$$

e) ¿Cuál es el resultado de $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$?

Solución.

Se elevan ambas fracciones, se multiplican y posteriormente se dividen para obtener el resultado.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1^2}{3^2} \cdot \frac{3^{-3}}{2^{-3}} = \frac{3^{-3}}{3^2 \cdot 2^{-3}} = 3^{-3-2} \cdot 2^3 = 3^{-5} \cdot 2^3 = \frac{1}{3^5} \cdot 2^3 = \frac{8}{243}$$

f) Simplifica la expresión $\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2}$

Solución.

Se simplifica la operación que encierra el corchete y se eleva al exponente -2 para obtener el resultado final.

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right]^{-2} = \left[\frac{\frac{1^3}{2^3}}{\frac{2^2}{3^2}}\right]^{-2} = \left[\frac{1^3 \cdot 3^2}{2^3 \cdot 2^2}\right]^{-2} = \left[\frac{3^2}{2^5}\right]^{-2} = \frac{(3^2)^{-2}}{(2^5)^{-2}} = \frac{3^{-4}}{2^{-10}} = \frac{\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{2^{10}}} = \frac{2^{10}}{3^4} = \frac{1024}{81}$$

Por tanto, el resultado final es $\frac{1024}{81}$

g) Simplifica $\left(\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}$

Solución.

En este ejercicio primero se aplica el teorema correspondiente a los números que se encuentran dentro del paréntesis, después se realizan las operaciones.

$$\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{8}}\right)^{-2}=\left(\frac{\frac{1}{2^4}}{\frac{1}{2^3}}\right)^{-2}=\left(\frac{2^3}{2^4}\right)^{-2}=(2^{-1})^{-2}=2^2=4$$

Por consiguiente, $\left(\frac{2^{-4}}{2^{-2}-2^{-3}}\right)^{-2}=4$

Actividades de aprendizaje 3.1.

a) Desarrolla las siguientes expresiones.

1) $(-4)^2$	2) -5^6	3) 6^{-4}	4) $(-1)^8$	5) $(-9)^3$
6) -2^{-5}	7) $(-3)^4$	8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	9) $\left(-\frac{1}{4}\right)^4$	10) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
11) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$	12) $\left(\frac{7}{3}\right)^3$	13) $\left(\frac{5}{9}\right)^5$	14) $-(1+2)^2$	15) $(3-1)^2$
16) $(5+11)^3$	17) $(0.5+3.8)^2$	18) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)^3$	19) $\left(5+\frac{1}{4}\right)^2$	20) $\left(\frac{1}{10}+1\right)^3$

b) **Simplifica las siguientes expresiones, emplea las definiciones y teoremas de los exponentes.**

1) $5^2 \cdot 5^2$

2) $3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{\frac{2}{3}}$

3) $(3^5 \cdot 5^{-4})(2^3 \cdot 3^{-7} \cdot 5^6)$

4) $4^2 \cdot 2^3 \cdot 8^2$

5) $\frac{5^8}{5^{10}}$

6) $\frac{5^4}{5^4}$

7) $\frac{3^5 \cdot 4^{-6}}{3^7 \cdot 4^{-8}}$

8) $\frac{2^{-8} \cdot 3^5 \cdot 5^{-6}}{2^{-7} \cdot 3^6 \cdot 5^{-5}}$

9) $\frac{2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{-\frac{3}{2}}}{2^{-\frac{7}{4}} \cdot 5^{-\frac{5}{2}}}$

10) $\frac{4^{-\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{8}} \cdot 6^{-3}}{4^{\frac{5}{6}} \cdot 9^{-\frac{5}{8}} \cdot 6^{-3}}$

11) $\frac{12^3 \cdot 3^3}{6^3 \cdot 2^2}$

12) $[(-5)^2]^3$

13) $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^6$

14) $(3 \cdot 5)^2$

15) $(2^4 \cdot 3^{-6} \cdot 5^2)^{-\frac{1}{2}}$

16) $\left(\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right)^2$

17) $\left(\frac{3^{-4} \cdot 5^{-1}}{3^2 \cdot 5^{-3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{3^4 \cdot 5^3}{3^2 \cdot 5^4}\right)^{-1}$

18) $\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]^4$

19) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^{-\frac{1}{2}}$

20) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]^2$

21) $\left(\frac{1}{2^{-3}} - \frac{1}{2^{-1}}\right)^{-3}$

3.3 Radicación.

Es la operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando. Para lo anterior se define:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donde:

a es la base ***m*** el exponente y ***n*** el índice.

Ejemplo 3.4

a) Verifica que se cumpla la igualdad $\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}}$

Solución.

Se descomponen ambas bases en factores primos y se aplica el teorema correspondiente de exponentes y la definición:

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{[(2)^3]^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

Además:

$$8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$$

Se observa que los 2 resultados son iguales, entonces se demuestra que $\sqrt[3]{8^2} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$.

Las raíces pares de números negativos no pertenecen al conjunto de los números reales ya que son cantidades imaginarias, las raíces impares de números negativos son negativas.

b) Aplica la definición de radicación y calcula $\sqrt[4]{625}$.

Solución.

Se descompone la base en factores primos y se aplica la definición para obtener el resultado final.

$$\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}} = 5$$

c) Encuentra la raíz quinta de -1024.

Solución.

Se descompone -1024 en sus factores primos y se aplica la definición:

$$\sqrt[5]{-1024} = -\sqrt[5]{1024} = -\sqrt[5]{2^{10}} = -2^{\frac{10}{5}} = -2^2 = -4$$

Por consiguiente, el resultado es -4

TEOREMAS

Los teoremas de los exponentes también se aplican a radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

$$\sqrt[n]{\mathbf{a\cdot b\cdot c}} = (\mathbf{a\cdot b\cdot c})^{\frac{1}{n}} = \mathbf{a}^{\frac{1}{n}}\cdot\mathbf{b}^{\frac{1}{n}}\cdot\mathbf{c}^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\mathbf{a}}\cdot\sqrt[n]{\mathbf{b}}\cdot\sqrt[n]{\mathbf{c}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{\mathbf{a}^{\frac{1}{n}}}{\mathbf{b}^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{\mathbf{a}}}{\sqrt[n]{\mathbf{b}}}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{\mathbf{a}}} = \left(\sqrt[m]{\mathbf{a}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\mathbf{a}^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{a}^{\frac{1}{m\cdot n}} = \sqrt[n\cdot m]{\mathbf{a}}$$

Ejemplo 3.5

a) Aplica los teoremas de los exponentes y obtén el resultado de $\sqrt[3]{\mathbf{216}}$.

Solución.

Se descompone 216 en sus factores primos, se aplica el teorema correspondiente y la definición para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{216} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3^3} = \sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3} = 2^{\frac{3}{3}}\cdot 3^{\frac{3}{3}} = 2\cdot 3 = 6$$

Por tanto, $\sqrt[3]{216} = 6$.

b) ¿Cuál es el resultado de $\left(\mathbf{2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(\mathbf{2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}}\right)$?

Solución.

Se descompone 125 en sus factores primos y el radical se expresa como exponente fraccionario, se aplican las leyes de los exponentes y se obtiene el resultado final.

$$\left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot\sqrt{3^5}\cdot 125^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot (5^3)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(2^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{-\frac{3}{2}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)\left(2^{-\frac{5}{4}}\cdot 3^{\frac{5}{2}}\cdot 5^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{4}+\left(-\frac{5}{4}\right)} \cdot 3^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2^{-\frac{4}{4}} \cdot 3^{\frac{2}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{2}}$$

$$= 2^{-1} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = \frac{15}{2}$$

c) ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{\sqrt{729}}$?

Solución.

Se descompone la base en factores primos y se aplica el teorema de radicales para obtener el resultado.

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}} = (3^6)^{\frac{1}{(3)(2)}} = (3^6)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$$

Por tanto, el resultado de la operación es 3.

d) Simplifica la expresión $\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}}$.

Solución.

Se transforman los radicales a exponentes fraccionarios y se realizan las operaciones con la aplicación de los respectivos teoremas.

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{2} \cdot 2^3}}{\sqrt[4]{32}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^3\right)^{\frac{1}{2}}}{(2^5)^{\frac{1}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(2^{\frac{1}{2}+3}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\left(2^{\frac{7}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{5}{4}}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2^{\frac{7}{4}}}{2^{\frac{5}{4}}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}} = 2^{\frac{2}{2}} = 2$$

Por último, el resultado es 2.

3.4 Simplificación.

Procedimiento que consiste en expresar un radical en su forma más simple. Para simplificar un radical, el exponente de la base debe ser mayor que el índice del radical.

Ejemplo 3.6

a) Simplifica $\sqrt{8}$

Solución

Se descompone el radicando en factores primos.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3}$$

2^3 se expresa como $2^2 \cdot 2$ y se aplica el teorema correspondiente de radicales.

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Por consiguiente, la simplificación de $\sqrt{8}$ es $2\sqrt{2}$

b) Simplifica $\sqrt{45}$

Solución.

Se descompone el radicando en factores primos y se procede a aplicar los teoremas.

$$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{3^5} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

Por tanto, $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

c) Simplifica $\sqrt[3]{72}$.

Solución.

Se descompone la base en factores primos y se simplifica la expresión.

$$\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$$

El resultado es $2\sqrt[3]{9}$.

d) Simplifica $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$.

Solución.

Se simplifica el radical y el resultado se multiplica por la fracción para obtener el resultado de la operación.

$$\frac{1}{2}\sqrt[5]{96} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3}$$

Actividades de aprendizaje 3.2.

a) Aplica las definiciones y los teoremas de los exponentes y efectúa los siguientes ejercicios:

1) $\sqrt{49}$

2) $\sqrt{289}$

3) $\sqrt[4]{81}$

4) $\sqrt[4]{6561}$

5) $\sqrt{196}$

6) $\sqrt{576}$

7) $\sqrt[3]{-1\,728}$

8) $\sqrt[3]{13\,824}$

9) $\sqrt[5]{248\,832}$

10) $\sqrt{2^2 \cdot 3^2}$

11) $\sqrt{5^2 \cdot 6^2 \cdot 3^4}$

12) $\sqrt[3]{3^6 \cdot 5^3}$

13) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^{10}}$

14) $\sqrt[3]{8^4 \cdot 4^3}$

15) $\sqrt{\frac{6^2}{3^2}}$

16) $\left(\sqrt{\frac{27}{125}}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\right)$

17) $\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{25}\right)^2$

18) $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

19) $\frac{\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt[12]{\frac{1}{27}}}$

20) $\left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}{5^2}\right)^{-1} \cdot \sqrt{\frac{5^{-1} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt[4]{5}}}$

21) $\sqrt{\frac{1}{3^{-2}} + \frac{1}{2^{-4}}}$

b) Simplifica las siguientes expresiones:

1) $\sqrt{20}$ 2) $\sqrt{72}$ 3) $\sqrt[3]{16}$ 4) $\sqrt[4]{135}$

5) $\sqrt[3]{250}$ 6) $\sqrt{162}$ 7) $\sqrt{180}$ 8) $2\sqrt[4]{405}$

9) $\frac{2}{7}\sqrt[3]{686}$ 10) $\frac{1}{3}\sqrt{540}$ 11) $\frac{2}{5}\sqrt[4]{1250}$ 12) $\frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{3600}}$

3.5 Suma y resta.

Estas operaciones ***se pueden efectuar si y solo si el índice del radical y del radicando son iguales*** (radicales semejantes).

$$\mathrm{a}\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{d}} + b\sqrt[n]{d} - c\sqrt[n]{d} = (a + b - c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplo 3.7

a) Efectúa $2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5}$.

Solución.

Los radicales son semejantes, por tanto, se realizan las operaciones con los números que les anteceden (coeficientes del radical)

$$2\sqrt[3]{5} + 11\sqrt[3]{5} = (2 + 11)\sqrt[3]{5} = 13\sqrt[3]{5}$$

Entonces el resultado es: $13\sqrt[3]{5}$

b) ¿Cuál es el resultado de la operación $3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$?

Solución.

Al ser semejantes los radicales, se efectúan las operaciones con los coeficientes.

$$3\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = (3 + 7 - 4)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

El resultado es: $6\sqrt{2}$

c) Efectúa $\frac{3}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{6}\sqrt{6}$

Solución.

Se realizan las operaciones con las operaciones con las fracciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{3}{4} + \sqrt{6} - \frac{1}{6}\sqrt{6} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{6}\right)\sqrt{6} = \frac{7}{12}\sqrt{6}$$

Si los radicandos son diferentes, no se pueden sumar o restar los radicales de primera instancia, entonces se simplifican; si resultan semejantes se efectúan las operaciones, de lo contrario, se dejan indicadas.

Ejemplo 3.8

a) ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}$?

Solución.

Se simplifican los radicales y se realiza la operación.

$$\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80} = \sqrt{2^2.5} + \sqrt{3^2.5} - \sqrt{2^4.5} = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2^2\sqrt{5} = (2 + 3 - 4)\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt{5}$.

b) Efectúa $\sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{56}$ **.**

Solución.

Se simplifican los radicales, se realizan las operaciones y se obtiene el resultado final.

$$\sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{56} = \sqrt[3]{3^3.7} + \sqrt[3]{2^3.7} = 3\sqrt[3]{7} + 2\sqrt[3]{7} = 5\sqrt[3]{7}$$

c) Realiza $\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}$.

Solución.

Se simplifican los radicales, se multiplican por las cantidades que les anteceden y se simplifican las fracciones:

$$\frac{2}{15}\sqrt{405}-\frac{1}{6}\sqrt{128}-\frac{1}{10}\sqrt{125}+3\sqrt{32}=\frac{2}{15}\sqrt{3^4\cdot 5}-\frac{1}{6}\sqrt{2^6\cdot 2}-\frac{1}{10}\sqrt{5^2\cdot 5}+3\sqrt{2^4\cdot 2}$$

$$=\frac{2}{15}\left(3^2\sqrt{5}\right)-\frac{1}{6}\left(2^3\sqrt{2}\right)-\frac{1}{10}\left(5\sqrt{5}\right)+3\left(2^2\sqrt{2}\right)$$

$$=\frac{18}{15}\sqrt{5}-\frac{8}{6}\sqrt{2}-\frac{5}{10}\sqrt{5}+12\sqrt{2}$$

$$=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{4}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}$$

Se agrupan los radicales semejantes y se realizan las operaciones para obtener el resultado.

$$=\frac{6}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}+12\sqrt{2}-\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$=\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}+\left(12-\frac{4}{3}\right)\sqrt{2}=\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$$

Por lo tanto, el resultado es $\frac{7}{10}\sqrt{5}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$

3.6 Multiplicación.

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES IGUALES.

Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos y de ser posible se simplifica el resultado.

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{a.b.c}$$

Ejemplo 3.9

a) **Efectúa $\sqrt{3}.\sqrt{5}$**

Solución.

Se multiplican ambos factores:

$$\sqrt{3}.\sqrt{5} = \sqrt{(3)(5)} = \sqrt{15}$$

Por lo consiguiente el resultado es $\sqrt{15}$

b) **¿Cuál es el resultado del producto $\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$?**

Solución.

Se realiza el producto y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{(6)(3)(2)} = \sqrt{36} = \sqrt{2^2\cdot 3^2} = \sqrt{2^2}\sqrt{3^2} = 2\cdot 3 = 6$$

El resultado del producto es 6.

c) **Realiza $(2\sqrt[3]{4})(3\sqrt[3]{10})$**

Solución

Se multiplica y se simplifica el resultado.

$$(2\sqrt[3]{4})\cdot(3\sqrt[3]{10}) = 6\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{10} = 6\sqrt[3]{(4)(10)} = 6\sqrt[3]{40} = 6\sqrt[3]{2^3\cdot 5} = 6\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{5} = 6(2)\sqrt[3]{5} = 12\sqrt[3]{5}$$

Por lo tanto, el resultado es $12\sqrt[3]{5}$

MULTIPLICACIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES DIFERENTES.

Para multiplicar radicales con índices diferentes se busca un índice común, que resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicales y recibe el nombre de "mínimo común índice".

Ejemplo 3.9

a) ¿Cuál es el resultado de $\sqrt[3]{2}\ \cdot\ \sqrt{5}$?

Solución

El mínimo común índice es 6, entonces los índices de los radicales se convierten a dicho índice.

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3\times 2]{(2)^2} = \sqrt[6]{2^2}$$

Además:

$$\sqrt{5} = \sqrt[2*3]{(5)^3} = \sqrt[6]{5^3}$$

Se efectúa el producto y se observa que no se puede simplificar el radical, por consiguiente, se desarrollan las potencias y se realiza la multiplicación.

$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{2^2\cdot 5^3} = \sqrt[6]{4\cdot 125} = \sqrt[6]{500}$$

Finalmente, el resultado es $\sqrt[6]{500}$

b) Efectúa $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{8}$.

Solución

Se descompone 8 en factores primos y el mínimo común índice es 4, por lo tanto, al transformar los radicales se obtiene:

$$\sqrt[2\times 2]{(2)^2} = \sqrt[4]{2^2} \qquad y \qquad \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^3}$$

Se efectúa la multiplicación y se simplifica el resultado.

$$\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{2^2\cdot 2^3} = \sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{2^4\cdot 2} = \sqrt[4]{2^4}\,\sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$$

Finalmente, el resultado de la operación es $2\sqrt[4]{2}$

c) Multiplica $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}$.

Solución

Se convierten los índices de los radicales a índice 8 y se realizan las respectivas operaciones.

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[2\times 4]{2^4}\cdot\sqrt[4\times 2]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4}\cdot\sqrt[8]{2^2}\cdot\sqrt[8]{2}=\sqrt[8]{2^4\cdot 2^2\cdot 2}=\sqrt[8]{2^7}=\sqrt[8]{128}$$

Por tanto, el resultado es $\sqrt[8]{128}$

Actividades de aprendizaje 3.3

a) Realiza las siguientes operaciones:

1) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}$

2) $\sqrt{3}+2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$

3) $3\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$

4) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{9}+\frac{1}{6}\sqrt[3]{9}$

5) $4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$

6) $7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-6\sqrt{5}$

7) $\frac{5}{3}\sqrt[4]{7}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{7}$

8) $5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-16\sqrt[3]{2}$

9) $\frac{2}{5}\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\frac{7}{4}\sqrt{6}$

10) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$

11) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$

12) $2\sqrt{5}+\sqrt{80}$

13) $4\sqrt{32}-7\sqrt{8}-3\sqrt{18}$

14) $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$

15) $3\sqrt{12}-2\sqrt{5}-7\sqrt{3}+\sqrt{125}$

16) $5\sqrt{8}-\sqrt{27}-\sqrt{32}+3\sqrt{3}+\sqrt{2}$

17) $4\sqrt{75}+6\sqrt{18}-\sqrt{128}-\sqrt{245}-\sqrt{98}-3\sqrt{125}$

18) $\sqrt{200}+\sqrt{50}-\sqrt{98}-\sqrt{338}$

19) $\frac{1}{4}\sqrt{192}-\frac{2}{5}\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$

20) $\frac{1}{22}\sqrt{605}+\frac{1}{30}\sqrt{1\,125}-\frac{1}{34}\sqrt{1\,445}$

21) $\frac{3}{4}\sqrt{176}-\frac{2}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{320}+\frac{1}{5}\sqrt{275}$

22) $\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{192}$

23) $\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{54}-\frac{1}{5}\sqrt[3]{375}$

24) $\frac{2}{5}\sqrt[3]{250}+\frac{3}{4}\sqrt[3]{128}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$

b) Realiza las siguientes multiplicaciones:

1) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$

2) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$

3) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$

4) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{21}$

5) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{12}$

6) $\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

7) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}$

8) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{27}$

9) $(3\sqrt{2})(5\sqrt{6})\sqrt{12}$

10) $(2\sqrt{6})(3\sqrt{12})\left(\frac{1}{12}\sqrt{18}\right)$

11) $\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right)\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)$

12) $(2\sqrt{5})(3\sqrt{20})$

13) $\sqrt[3]{15}\cdot\sqrt[3]{9}$

14) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}$

15) $(2\sqrt[3]{10})(5\sqrt[3]{72})$

16) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{4}$

17) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{3}$

18) $\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt{2}$

19) $\sqrt[5]{96}\cdot\sqrt[3]{3}$

20) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}$

21) $\sqrt[3]{54}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}$

22) $\sqrt[6]{6}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{6}$

23) $\left(\frac{3}{2}\sqrt{6}\right)\left(\frac{2}{6}\sqrt[6]{12}\right)$

24) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{6}\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}\right)$

3.7 División.

DIVISIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES IGUALES.

Para efectuar la división se aplica el siguiente teorema:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 3.10

a) **Realiza $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$**

Solución

Los radicales son de igual índice, entonces se dividen en los radicandos.

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{10}{2}} = \sqrt{5}$$

El resultado de la operación es $\sqrt{5}$

b) **¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}}$?**

Solución

Se simplifican los radicales y se realiza la operación

$$\frac{6\sqrt{28}}{\sqrt{63}} = \frac{6\sqrt{2^2 \times 7}}{\sqrt{3^2 \times 7}} = \frac{6\sqrt{2^2} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3^2} \times \sqrt{7}} = \frac{6(2)}{3}\sqrt{\frac{7}{7}} = \frac{12}{3}\sqrt{1} = 4(1) = 4$$

Por tanto, el cociente es 4.

<u>Para introducir una cantidad a un radical, se debe elevar la cantidad a un exponente igual al índice del radical.</u>

c) Realiza $\frac{\sqrt{48}}{2}$

Solución

El divisor se expresa como $2=\sqrt{2^2}$ y se realiza la operación para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

DIVISIÓN DE RADICALES CON ÍNDICES DIFERENTES.

Se transforman los radicales en un índice común y después se realiza la división.

Ejemplo 3.11

a) Halla el cociente de $\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}$.

Solución

Se transforman los índices de los radicales a 12 y se realiza la operación.

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\cdot 3]{(2^3)^3}}{\sqrt[3\cdot 4]{(2^3)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

El resultado de la operación es $\sqrt[12]{2}$

b) ¿Cuál es el resultado de $\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}$?

Solución

Se divide cada término del numerador entre el denominador y se obtiene:

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\times 2]{(2\cdot 3)^2}}{\sqrt[2\times 3]{3^3}}=3\sqrt{4}+\frac{\sqrt[6]{2^2\cdot 3^2}}{\sqrt[6]{3^3}}$$

$$3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

3.8 Racionalización.

Racionalizar es representar una fracción en otra equivalente que contenga una raíz en el numerador, cuyo numerador o denominador sea un número racional respectivamente.

RACIONALIZACIÓN DEL DENOMINADOR.

Dada una expresión de la forma $\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}$ se racionaliza de la siguiente manera:

$$\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{c}{\sqrt[n]{a^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}=\frac{c}{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}$$

Ejemplo 3.12

a) Transforma $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en otra expresión equivalente que carezca de raíz en el denominador.

Solución

La fracción $\frac{1}{\sqrt{3}}$ se multiplica por $\sqrt{3^{2-1}}=\sqrt{3}$ tanto denominador como numerador.

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto, la expresión equivalente a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) Racionaliza la expresión $\sqrt{\frac{2}{5}}$.

Solución

Se debe separar la expresión de raíces y se multiplican por $\sqrt{5^{2-1}}=\sqrt{5}$ tanto numerador como denominador, para obtener el resultado:

$$\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

Finalmente, el resultado de la racionalización es $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

<u>Racionalización de un denominador binomio.</u>

Para racionalizar una fracción cuyo denominador es un binomio $(a \pm b)$ y alguno o ambos elementos tienen una raíz cuadrada, se multiplica por el conjugado del binomio $(a \mp b)$.

$$\frac{c}{\mathrm{a} \pm \mathrm{b}} = \frac{c}{\mathrm{a} \pm \mathrm{b}} \cdot \frac{\mathrm{a} \mp \mathrm{b}}{\mathrm{a} \mp \mathrm{b}} = \frac{\mathrm{c} \cdot (\mathrm{a} \mp \mathrm{b})}{a^2 - b^2}$$

Ejemplo 3.13

a) Racionaliza la expresión $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica el numerador y el denominador de la expresión por $1 - \sqrt{2}$, que es el conjugado del denominador $1 + \sqrt{2}$

$$\frac{3}{1 + \sqrt{2}} = \frac{3}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{(1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{3 - 3\sqrt{2}}{-1} = 3\sqrt{2} - 3$$

La expresión equivalente a la propuesta es $3\sqrt{2} - 3$

b) Racionaliza la expresión $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

Solución

Se multiplica por el conjugado del denominador y se simplifica para obtener el resultado.

$$\frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{3}}{5 - 3} = \frac{7\sqrt{5} + 7\sqrt{3}}{2}$$

c) Racionaliza $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica al numerador y denominador por $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$, y se efectúa la simplificación.

$$\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{6\left(\sqrt{3}\right)^2+3\sqrt{6}-4\sqrt{6}-2\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{18-\sqrt{6}-4}{12-2}=\frac{14-\sqrt{6}}{10}$$

RACIONALIZACIÓN DE UN NUMERADOR.

Dada una expresión de la forma $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}$, el numerador se racionaliza con la siguiente forma:

$$\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}=\frac{\sqrt[n]{a^m}}{c}\cdot\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^n}}{c\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

Ejemplo 3.14

a) Racionaliza el numerador de $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplica el numerador y denominador de la fracción por $\sqrt{2^{2-1}}=\sqrt{2}$ y se obtiene el resultado.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2^2}}{3\sqrt{2}}=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$

b) ¿Cuál es la expresión equivalente que resulta al racionalizar el numerador de $\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}$?

Solución

Se multiplica por $\sqrt[4]{3^{4-1}}$=$\sqrt[4]{3^3}$ ambos elementos de la fracción para obtener el resultado.

$$\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{5}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}}=\frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{5\cdot 3^3}}=\frac{3}{\sqrt[4]{5\cdot 27}}=\frac{3}{\sqrt[4]{135}}$$

Racionalización de un numerador binomio.

Para racionalizar un numerador binomio que contenga 1 o 2 raíces cuadrada en el numerador, se efectúa el mismo procedimiento que se empleó para racionalizar un denominador.

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a \pm b}{c} \cdot \frac{a \mp b}{a \mp b} = \frac{a^2 - b^2}{c \cdot (a \mp b)}$$

Ejemplo 3.15

a) Racionaliza el numerador $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$.

Solución

Se multiplican los elementos de la fracción por 1-$\sqrt{2}$ que es el conjugado del numerador.

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{1-2}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{-1}{3\left(1-\sqrt{2}\right)} = \frac{-1}{3-3\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}-3}$$

Por consiguiente, el resultado de la racionalización es $\frac{1}{3\sqrt{2}-3}$

b) Racionaliza el numerador de $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Solución

Se multiplica numerador y denominador por $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ que es el conjugado del numerador, se efectúan las multiplicaciones y se obtiene el resultado.

$$\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2}{4\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{15} - 2\sqrt{15} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{4(3)-5}{4(3)-4\sqrt{15}+5}$$

$$= \frac{12-5}{12-4\sqrt{15}+5} = \frac{7}{17-4\sqrt{15}}$$

Actividades de aprendizaje 3.4

a) Realiza las siguientes operaciones:

1) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ 2) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$ 3) $\frac{5\sqrt{120}}{6\sqrt{40}}$ 4) $\frac{7\sqrt{140}}{8\sqrt{7}}$

5) $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}}$ 6) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right) \div \left(2\sqrt{2}\right)$ 7) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\right) \div \left(2\sqrt[3]{2}\right)$ 8) $\frac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{3}}$

9) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[3]{4}}$ 10) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{2}}$ 11) $\frac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[10]{16}}$ 12) $\frac{\sqrt[7]{6}}{\sqrt[14]{3}}$

13) $\frac{\sqrt{200}-\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ 14) $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{6}}{\sqrt{2}}$ 15) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{2}}$ 16) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{4}-\sqrt[5]{16}}{\sqrt{8}}$

b) Racionaliza los siguientes denominadores:

1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ *2)* $\frac{3}{\sqrt{3}}$ *3)* $\frac{5}{\sqrt[3]{3}}$ *4)* $\frac{2}{\sqrt[4]{8}}$

5) $\frac{12}{\sqrt{6}}$ *6)* $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ *7)* $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{20}}$ *8)* $\frac{6}{\sqrt[3]{4}}$

9) $\frac{10}{\sqrt{20}}$ *10)* $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{5}}$ *11)* $\frac{\sqrt{45}-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ *12)* $\frac{8}{3+\sqrt{7}}$

13) $\frac{4}{\sqrt{6}+2}$ *14)* $\frac{2+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ *15)* $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ *16)* $\frac{2}{3+\sqrt{2}}$

17) $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$ *18)* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ *19)* $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ *20)* $\frac{2}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

c) Racionaliza el numerador en los siguientes radicales.

1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$

3) $\frac{1}{5}\sqrt{7}$

4) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

5) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}$

6) $\frac{3\sqrt[5]{2}}{4}$

7) $\sqrt{\frac{5}{12}}$

8) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

9) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

10) $\frac{5+\sqrt{7}}{4}$

11) $\frac{2-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$

12) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

13) $2-\sqrt{7}$

14) $3+\sqrt{5}$

15) $\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

ÁLGEBRA

Capítulo 4

OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

4.1. Diferencia del álgebra con la aritmética

Mientras que en la aritmética usamos números reales, que son específicos, en el álgebra se emplean símbolos, que normalmente son letras del alfabeto, considerados como números generales o literales. Los números literales se utilizan en el álgebra para permitirnos considerar propiedades generales de los números, y no sus atributos.

Álgebra es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

4.2. Notación y terminología álgebraicas

Los símbolos usados en álgebra para representar las cantidades son los números y las letras. Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

Las *cantidades conocidas* se representan por las primeras letras del alfabeto: *a*, *b*, *c*, *d, e*,. . .

Las *cantidades desconocidas* se representan por las últimas letras del alfabeto: *u*, *v*, *w*, *x*, *y*, *z*.

Los signos empleados en el álgebra son de tres clases:

1. *signos de operación* (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).

2. *signos de relación* (=, > y <).

3. *signos de agrupación* (paréntesis ordinario (), corchete [] y llaves {}).

Para representar el producto de un número determinado y una literal, se escriben juntos, primero el número seguido de la literal.

Por ejemplo $-4a$ *indica el producto del número* -4 *y la literal a*. *El producto de dos literales c y d*, *se escribe como cd*.

Cada elemento en la multiplicación recibe el nombre de *factor*.

En el producto de dos factores, cualquiera de ellos es llamado *coeficiente*. Existen dos tipos de coeficientes (1) *coeficientes numéricos* y (2) *coeficientes literales*.

Por ejemplo, en el producto 7*a*, *el* 7 *es el coeficiente numérico y en el producto ab*, *a es el coeficiente literal*.

Cuando una cantidad no tiene coeficiente numérico, su coeficiente es la unidad.

El coeficiente indica el número de veces que el otro factor se toma como sumando.

Por ejemplo, en la expresión 7*a*, *el coeficiente numérico* 7 *indica que a se debe sumar* 7 *veces, o sea* $7a = a+a+a+a+a+a+a$; *en el producto ab*, *el factor a indica que el factor b se debe tomar a veces como sumando, o sea* $ab = b+b+b+b. . .a$ *veces*.

Un *término álgebraico* puede ser un número específico, un número literal, un producto de ellos, cociente, o una extracción de raíz.

Por ejemplo, las cantidades 5, $3a$, xy, $-\frac{8b}{a}$, $\sqrt{16x}$ *son términos álgebraicos*.

Una *expresión álgebraica* simboliza una combinación de términos mediante adición y sustracción.

Las cantidades 5, 3a, 4y, 2xy, 1−2x, $\mathrm{xy}-\frac{1}{\mathrm{x}}+\sqrt{\mathrm{yz}}$ son ejemplos de expresiones álgebraicas.

Las expresiones álgebraicas se clasifican de acuerdo con el número de términos.

Monomio es una expresión álgebraica que consta de un solo término. *Son ejemplos de monomios:* xy, $-2a$, xyz, $(a+b)$.

Polinomio es una expresión álgebraica que consta de más de un término. A un polinomio que consta de dos términos se le llama *binomio* y a un polinomio de tres términos se le llama *trinomio*.

Son ejemplos de polinomios $x-y$ $\quad ab^2 - 3m^2n$ $\quad x^3-3xy+4y$ $\quad ax^2+bx+c$.

Los primeros dos ejemplos son binomios, el tercer y cuarto son trinomios.

Para determinar *el grado de un término* se ***suman los exponentes*** de la parte literal del término.

Ejemplo 4.1

El término $-5x^2$ *es de grado* 2

E*l término* $3xy^3$ *es de grado 4*

El término $56x^2z^2$ *es de grado 4*.

El exponente del coeficiente no define el grado de un término.

El grado *de un polinomio* puede ser *absoluto* y *con relación a una letra.*

El grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado.

Por ejemplo, el polinomio $3x^6-5x^4+10x^2-2x+10$ *es de grado absoluto seis, ya que el término de mayor grado es* $3x^6$.

El grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente con el que aparece dicha letra en el polinomio.

Por ejemplo, el polinomio $3x^6y-5x^4y^3+10x^2y^5-2xy^7$ *es de sexto grado respecto a la literal x, pero de séptimo grado respecto a y*.

Así mismo, este polinomio es de grado absoluto 8 debido a que el término $2xy^7$ al sumar sus exponentes es 8 y ese es el término con mayor grado.

Dos términos son semejantes si tienen las mismas literales afectadas por los mismos exponentes.

Por ejemplo, los términos $3x^2z$ *y* $-7x^2z$ *son semejantes, los términos* $5xy^3$ *y* $5x^3y$ *no son semejantes puesto que el exponente de cada literal es distinto*.

Los términos semejantes pueden ser sumados o restados, no así los términos que no son semejantes. A la operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes se le da el nombre de reducción de términos semejantes.

Ejemplo 4.2

Reducir los términos semejantes de cada expresión álgebraica dada.

$$-a^2+3mn^2+9a^2+7mn^2=-a^2+9a^2+3mn^2+7mn^2=8a^2+10mn^2$$

Actividades de aprendizaje 4.1.

a) - Determine el grado absoluto de los siguientes términos.

1) 5a 2) -3ab^3 3) 12xy^2 4) $\frac{2}{3}x^3y^2$ 5) 3^{4}xyz^2

b) Determine el grado de cada polinomio respecto a la literal indicada.

1) $a - 2a^2b + 6ab^3 - 5b$ Respecto a la letra a.

2) $-2a^2b + 6ab^3 - 5b$ Respecto a la letra b.

3) $\sqrt{5}a^3b^2 + 6\sqrt{3}a^2b^3 - b^5$ Respecto a la letra a.

4) $\sqrt{5}a^3b^2 + 6\sqrt{3}a^2b^3 - b^5$ Respecto a la letra b.

5) $abcx^5 - 2ax^7 + 14a^3bc^2x$ Respecto a la letra a.

6) $abcx^5 - 2ax^7 + 14a^3bc^2x$ Respecto a la letra x.

c) Determinar el grado absoluto de cada uno de los siguientes polinomios.

1) $-2a^5b^3 + 2a^2b^3 + 3b^6$

2) $\sqrt{5}a^3b^2 + \sqrt{3}a^2b^3 - 4b^5$

3) $abcx^5 - 2ax^7 + 14a^3bc^2x$

d) Escribir un polinomio que satisfaga las características dadas en cada inciso.

1) Trinomio de tercer grado absoluto.

2) Binomio de quinto grado absoluto.

3) De quinto grado respecto a la letra a.

4) De tercer grado respecto a la letra x.

e) Ordenar los siguientes polinomios respecto a cualquier letra en orden ascendente y, luego, en orden descendente.

1) $2y^4 + 4y^5 - 6y + 2y^2 + 5y^3$

2) $y^{12} - 4x^9y^6 + x^{12}y^4 + 5x^3y^{10}$

3) $-3m^{15}n^2 + 14m^{12}n^3 - 8m^6n^5 + n^7 - 7m^9n^4 + m^{18}n$

f) Reducir los polinomios con términos semejantes de la misma clase:

1) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$

2) $3a^{x-1} - 3a^{x-1}$

3) $-\frac{5}{6}a^2b - \frac{1}{8}a^2b$

4) $\frac{1}{3}xy + \frac{1}{6}xy$

5) $0.5m + 0.6m + 0.7m - 0.8m$

6) $m^{x+1} + 3m^{x+1} + 4m^{x+1} + 6m^{x+1}$

7) $-\frac{1}{3}ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{12}ab - \frac{1}{9}ab$

8) $25m^{a-1} - 32m^{a-1} + 16m^{a-1}$

9) $-24a^{x+2} - 15a^{x+2} + 39a^{x+2}$

10) $-\frac{3}{5}m + \frac{1}{4}m - \frac{1}{2}m$

g) Reducir los polinomios con términos semejantes de distinta clase

1) $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - 3a + \frac{1}{2}a - 2b$

2) $5x - 11y - 9 + 20x - 1 - y$

3) $-a+b-c+8+2a+2b-19-2c-3a-3-3b+3c$

4) $10-x^4y-x^3y^2-y^3+x^2y+x^3y^2-x^2y-4y^3+7x^3y^2-8x^4y+21x^4y-50$

5) $\frac{3}{25}a^{m-1}-\frac{7}{50}b^{m-2}+\frac{3}{5}a^{m-1}-\frac{1}{25}b^{m-2}-0.2a^{m-1}+\frac{1}{5}b^{m-2}$

6) $0.3a+0.4b+0.5c-0.6a-07b-0.9c+3a-3b-3c$

7) $0.4x^2y+31+\frac{3}{8}xy^2-0.6y^3-\frac{2}{5}x^2y-0.2xy^2+\frac{1}{4}y^3-6$

4.3 Evaluación de expresiones álgebraicas

Se llama evaluación al proceso de calcular el valor numérico de una expresión. El valor numérico de una expresión puede calcularse cuando a cada número literal se le asigna un valor específico.

Al evaluar una expresión álgebraica se debe atender la siguiente jerarquía para realizar las operaciones.

Jerarquía de las operaciones

1. Efectuar los cálculos dentro de los signos de agrupación.

2. Multiplicar y dividir en orden de izquierda a derecha.

3. Suma y resta en orden de izquierda a derecha.

Ejemplo 4.3

Hallar el valor numérico de $4a^2bc+2a^2bc^3-5b$ para $a=1$, $b=2$, $c=3$

Solución.

$$4a^2bc+2a^2bc^3-5b=4\cdot 1^2\cdot 2\cdot 3+2\cdot 1^2\cdot 2\cdot 3^3-5\cdot 2$$
$$4a^2bc+2a^2bc^3-5b=24+108-10$$
$$4a^2bc+2a^2bc^3-5b=122$$

Ejemplo 4.4

Hallar el valor numérico de $\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax}$ para $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{6}$

Solución.

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax} = \frac{3 \cdot 2^2}{4} - \frac{5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} + \frac{\frac{1}{3}}{2 \cdot \frac{1}{6}}$$

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax} = 3 - \frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{6}} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{5ab}{x} + \frac{b}{ax} = 3 - 20 + +1 = -16$$

Actividades de aprendizaje 4.2.

a) Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{2}{3}$, $p = \frac{1}{4}$, $x = 0$.

1) $a - 2b + c$

2) $a - 4b + 3c - 7d$

3) $c - (2a - d)$

4) $2c - 2(3a - 2b)$

5) $3b - b(3 - d)$

6) $\dfrac{5ad + 4bc}{ac}$

7) $\dfrac{a + 2b}{c - d}$

8) $\dfrac{4d^2}{2} + \dfrac{16n^2}{2} - 1$

9) $\dfrac{a + b}{c} - \dfrac{b + m}{d}$

10) $\sqrt{4b} + \dfrac{\sqrt{3a}}{3} - \dfrac{\sqrt{6m}}{6}$

11) $x + m\left(a^b + d^c - c^a\right)$

12) $\left(\dfrac{8m}{9n} + \dfrac{16p}{b}\right) a$

13) $(2m+3n)(4p+b^2)$

14) $2mx+6(b^2+c^2)-4d^2$

15) $b^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2$

4.4 Adición y sustracción de polinomios

En aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en álgebra la suma es un concepto más general, pues puede significar aumento o disminución, ya que hay sumas álgebraicas que equivale a una resta en aritmética. La suma tiene por objeto reunir dos o más expresiones álgebraicas (sumandos) en una sola expresión álgebraica (suma).

Para sumar dos o más expresiones álgebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes.

Para restar dos polinomios se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay.

Ejemplo 4.5

Hallar la suma de 3m-2n+ p, 6m+3n-5 y -m+n+4p+3.

Solución.

La suma se indica anotando los sumandos dentro de paréntesis:

$$(3m-2n+p)+(6m+3n-5)+(-m+n+4p+3)$$

A continuación, se colocan todos los términos de estos polinomios unos a continuación de los otros y se reducen los términos semejantes.

$$3m-2n+p+6m+3n-5-m+n+4p+3 \quad = \quad 8m+2n+5p-2$$

Otra manera de realizar la suma es anotando los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columna; y después se hace la reducción.

+3m	- 2n	+ p	
+6m	+ 3n		− 5
-m	+ n +	+4p	+ 3
+8m	+ 2n	+ 5p	− 2

Ejemplo 4.6

De 3x-2y+z restar 2x+y-3z

Solución.

La sustracción se indica anotando el sustraendo en un paréntesis precedido de un signo menos. Al sustraendo se le quitan los paréntesis y al mismo tiempo se le cambian todos los signos a sus términos. Se reducen términos semejantes.

3x - 2y + z - (2x + y - 3z) = 3x - 2y + z - 2x – y + 3z = **x - 3y + 4z**

Al igual que en la adición, la sustracción puede hacerse por filas; primero el minuendo y enseguida el sustraendo con todos sus signos cambiados sin olvidar escribir términos semejantes en la misma columna.

+3x	−2y	+z
−2x	−y	+3z
+x	−3y	+4z

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.3.

a) Hallar la suma de los siguientes polinomios

1) $4x - 3y,\ \ 2x - 6y$

2) $7a + 7b,\ \ -3a - 4b$

3) $x - 3y,\ \ 6x - 3y,\ \ -x + 2y$

4) $2x - 3y + z,\ \ 2y - x,\ \ 3y - 2z - 3x$

5) $5ab - 2a + b,\ \ ab + 2a - 3,\ \ 5a - ab$

6) $10b + 5bc - 6c,\ \ 7bc - 4b + c,\ \ 9c - 8bc$

7) $8xy - 2yz,\ \ 2xy - z + 6yz,\ \ 9yz - 7yx - 3z$

8) $a^{x+2} - a^{x} + a^{x+1},\ \ -3a^{x+3} - a^{x-1} + a^{x+2},\ \ -a^{x} + 4a^{x+3} - 5a^{x+2}$

9) $m^3 - n^3 + 6m^2n,\ \ -4m^2n + 5mn^2 + n^3,\ \ m^3 - n^3 + 6mn^2,\ \ -2m^3 - 2m^2n + n^3$

10) $\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}ab - \frac{1}{2}b^2,\ \ \frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{6}b^2,\ \ \frac{1}{3}a^2 - \frac{3}{5}ab + \frac{1}{4}b^2$

b) Hallar la resta indicada.

1) De $a + b$ restar $a - b$

2) De $8a + b$ restar $-3a + 4$

3) De $a + b + c - d$ restar $-a - b + c - d$

4) De $y^5 - 9y^3 + 6y^2 - 31$ restar $-11y^4 + 31y^3 - 8y^2 - 19y$

5) De $m^{n+1} - 6m^{n-2} + 8m^{n-3} - 19m^{n-5}$ restar $8m^n + 5m^{n-2} + 9m^{n-5}$

6) Restar $-x + y - z$ de $x + 3y - 6z$

7) Restar $m^2 - n^2 - 3mn$ de $-5m^2 - n^2 + 6mn$

4.5. Signos de agrupación

Los símbolos de agrupación, como son los paréntesis ( ), corchetes [ ] y llaves { }, se utilizan para señalar de una manera más sencilla, más de una operación.

Cuando se escribe un polinomio dentro de un paréntesis, se considera a este como una sola cantidad.

Por ejemplo, la expresión a -(b+c) significa que la suma de b y c se va a sustraer de a.

Eliminar o suprimir los símbolos de agrupación significa efectuar las operaciones indicada s por ellos. Se eliminan los símbolos de uno en uno, ***empezando con el que esté situado más adentro***, siguiendo el orden propio de las operaciones a efectuar.

Ejemplo 4.7

Suprimir los símbolos de agrupación y reducir términos semejantes:

$$4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (3x^2 + y^2)]$$

Solución.

Eliminamos el paréntesis.

$$4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (3x^2 + y^2)] = 4x^2 + [-x^2 + xy - 3y^2 + 2xy - 3x^2 - y^2]$$

Eliminamos los corchetes.

$$4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (3x^2 + y^2)] = 4x^2 - x^2 + xy - 3y^2 + 2xy - 3x^2 - y^2$$

Agrupamos los términos semejantes.

$$4x^2 + [-(x^2 - xy) + (-3y^2 + 2xy) - (3x^2 + y^2)] = (4x^2 - x^2 - 3x^2) + (xy + 2xy) + (-3y^2 - y^2)$$

Simplificando.

$$\mathbf{4x^2 + \left[-\left(x^2 - xy\right) + \left(-3y^2 + 2xy\right) - \left(3x^2 + y^2\right)\right] = 3xy - 4y^2}$$

Ejemplo 4.8

Eliminar los símbolos de agrupación y reducir términos semejantes:

$$-a+b-2(a-b)+3\{-[2a+b-3(a+b-1)]\}-3[-a+2(-1+a)]$$

Solución.

Eliminando paréntesis.

$$=-a+b-2a+2b+3\{-[2a+b-3a-3b+3]\}-3[-a-2+2a]$$

Eliminando corchetes.

$$=-a+b-2a+2b+3\{-2a-b+3a+3b-3\}+3a+6-6a$$

Eliminando llaves.

$$=-a+b-2a+2b-6a-3b+9a+9b-9+3a+6-6a$$

Agrupando términos semejantes.

$$=(-a-2a-6a+9a+3a-6a)+(b+2b-3b+9b)+(-9+6)$$

Simplificando.

$$\boldsymbol{-a+b-2(a-b)+3\{-[2a+b-3(a+b-1)]\}-3[-a+2(-1+a)]=-3a+9b-3}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.4.

Elimine los símbolos de agrupación y reduzca términos semejantes.

1) $3a+(4-2a)$

2) $7a-(a+7)$

3) 5x-(1-3x)

4) 6-3(2x-1)

9) 12x-(12-5x)+2(3x-4)

10) 2x+[y-(x-y)]

11) 9y+[3x-(y+4x)]

12) a-[7-3(4-a)]

5) $(2x-3y)-4(x-5y)$

6) $2(5x-4y)-(7x+y)$

7) $8(2a-b)-4(b-a)$

8) $3a-(2b+3a)+(b+a)$

13) $4x-[9-4(3-x)]$

14) $x-[3x+(4-x)]-[8-3(x-2)]$

15) $3y-[x-2(3x-y)]-[2y-(x+3y)]$

16) $6+4[x-(2x+3)]-[7+3(x-2)]$

4.6. Productos de monomios y polinomios

Las propiedades de los números reales, incluyendo las leyes de los signos y las leyes de los exponentes, se pueden utilizar para hallar el producto de dos o más monomios, de un monomio y un polinomio, o bien, de dos polinomios. En los siguientes ejemplos se muestra el procedimiento para llevar a cabo estos productos.

Para poder realizar el producto de monomios y polinomios es importante recordar la ley de los exponentes: ***Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.***

$$\boldsymbol{(a^m)(a^n) = a^{m+n}}$$

Ejemplo 4.9

Hallar el producto de monomios $(5x^3y)(2xy)(7x^2y^2)$

Solución.

Se aplica la propiedad conmutativa

$$(5x^3y)(2xy)(7x^2y^2) = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y^2$$

Se suman exponentes.

$$(5x^3y)(2xy)(7x^2y^2) = 70 \cdot x^{3+1+2} \cdot y^{1+1+2}$$

Se realiza el producto.

$$\boldsymbol{(5x^3y)(2xy)(7x^2y^2) = 70 \cdot x^6 \cdot y^4}$$

Ejemplo 4.10

Hallar el producto de un monomio por un binomio $(3xy^2)(2xy + y^2)$.

Solución.

Se aplica la propiedad distributiva.

$$(3xy^2)(2xy + y^2) = 3xy^2 \cdot 2xy + 3xy^2 \cdot y^2$$

Se multiplican los monomios.

$$(3xy^2)(2xy + y^2) = 2 \cdot 3x^{1+1} \cdot y^{2+1} + 3 \cdot x \cdot y^{2+2}$$

$$(3xy^2)(2xy + y^2) = 6x^2y^3 + 3xy^4$$

Se ordena el resultado.

$$\mathbf{(3xy^2)(2xy + y^2) = 3xy^4 + 6x^2y^3}$$

Ejemplo 4.11

Hallar el siguiente producto de los binomios $(3x + y)(4x - 2y)$

Solución.

$(4x - 2y)$ Se considera como un solo termino y se aplica la propiedad distributiva.

$$(3x + y)(4x - 2y) = 3x(4x - 2y) + y(4x - 2y)$$

Se realizan los productos.

$$(3x + y)(4x - 2y) = 12x^2 - 6xy + 4xy - 2y^2$$

Se simplifican términos semejantes.

$$\mathbf{(3x + y)(4x - 2y) = 12x^2 - 2xy - 2y^2}$$

Ejemplo 4.12

Hallar el siguiente producto de polinomios $(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + xy - 2y^2)$

Solución.

Se aplica propiedad distributiva

$$= x^2(2x^2 + xy - 2y^2) - 2xy(2x^2 + xy - 2y^2) + 2y^2(2x^2 + xy - 2y^2) =$$

Se realizan los productos.

$$= 2x^4 + x^3y - 2x^2y^2 - 4x^3y - 2x^2y^2 + 4xy^3 + 4x^2y^2 + 2xy^3 - 4y^4$$

Se simplifican términos semejantes.

$$= 2x^4 - 4y^4 + 6xy^3 - 3x^3y$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.5.

a) Halle los productos indicados en cada uno de los siguientes problemas:

1) $(2x^2y^3)(-3xy^2)$

2) $(5x^4y^3)(-3x^2y^2)$

3) $(-7xy^4)(-2x^2y)$

4) $(-4x^2y^3)(-3x^5y^2)$

5) $(2x^3)^2$

6) $(3x^2)^4$

7) $(4x^5)^3$

8) $(5x^2)^3$

9) $2x^2y\,(3xy^3 - 5x^2y^4)$

10) $3x^3y\,(2xy^2 - 4x^2y)$

11) $4x^2y^3\,(2xy^3 - 3x^2y)$

12) $5xy^4\,(2x^2y^3 - 5xy^2)$

13) $-2x^2y^3\,(3xy^2 - 2x^2y)$

14) $-3xy^2y\,(2x^2y^3 - 5x^3y)$

15) $5x^3y^4\,(2xy^2 - 4x^3y)$

16) $7x^2y^4\,(3x^3y^2 - 2x^5y^3)$

17) $2x^2y\,(3y - 2x) - 3xy^2(2x - y)$

18) $3xy\,(2x + 3x^2y) - 2x^2y\,(4 - xy)$

19) $5xy^3(2x^2y - 3xy^3) - 4x^2y\,(2xy^3 - 7y^5)$

20) $7x^2y\,(2xy^3 - 3x^2y^2) - 4xy^3(3x^2y - 5x^3)$

b) Desarrolle cada uno de los siguientes productos y simplifique el resultado:

1) $(3x + 2y)\,(2x - 3y)$

2) $(4x - 3y)\,(2x + 3y)$

3) $(5x - 3y)(3x - 2y)$

4) $(7x - 4y)(2x - 5y)$

5) $(4x - 7)(3x - 4)$

11) $(4x^2 - 2x + 7)(2x^2 + 3x - 2)$

12) $(5x^2 + 2x - 3)(x^2 - 3x - 3)$

13) $(2x - 3y)(3x^2 + 2xy - y^2)$

14) $(3x + 7y)(3x^2 - 4xy + 2y^2)$

15) $(4x - 3y)(2x^2 + 5xy - 3y^2)$

6) $(6x - 5)(3x - 8)$

7) $(5x + 4)(4x - 5)$

8) $(2x - 7)(7x + 2)$

9) $(3x + 5)(2x^2 - 3x - 5)$

10) $(4x + 1)(3x^2 + 4x - 1)$

16) $(5x - y)(3x^2 - 3xy + 2y^2)$

17) $(2x^2 + 3xy - 3y^2)(x^2 - 3xy + 2y^2)$

18) $(2x^2 - xy + 3y^2)(3x^2 - xy - 2y^2)$

19) $(5x^2 + 2xy + y^2)(2x^2 - xy + 3y^2)$

20) $(x^2 - 3xy + 2y^2)(x^2 + 3xy - y^2)$

4.7. División de polinomios

Supóngase que P y D son polinomios con ***el grado de P mayor que el grado de D***, y D ≠ 0. Entonces existe un polinomio Q, denominado cociente, y un polinomio R, denominado residuo, tales que $P = D \cdot Q + R$ donde R tiene un grado menor que el divisor D, o bien puede ser cero.

Algoritmo para la división de polinomios

1. Disponga los términos en P y D en potencias decrecientes de la variable. Si algún coeficiente en P es cero, deje un espacio o inserte un cero.

2. Divida el primer término en P entre el primer término en D para obtener el primer término del cociente Q.

3. Multiplique D por el primer término del cociente y sustraiga este producto de P.

4. Dejando el divisor sin cambios, tome el resultado del paso 3 como el nuevo P y luego repita los pasos 2 y 3.

5. Continúe este proceso hasta obtener un residuo cuyo grado sea menor que el de D.

Ejemplo 1.13

Halle el cociente y el residuo, si $6x^2 + 5x - 1$ se divide entre $2x - 1$.

Solución.

$3x + 4$ $\qquad$ $6x^2/2x = 3x$ y $\qquad$ $8x/2x = 4$

$$
\begin{array}{lll}
2x-1 & 6x^2+5x-1 & \\
 & \underline{6x^2-3x} & =(2x-1)3x \quad \text{se resta} \\
 & \quad 8x-1 & \\
 & - \; \underline{\quad 8x-4} & (2x-1)4 \quad \text{se resta} \\
 & \quad\quad +3 &
\end{array}
$$

El resultado de la división debe escribirse como:

$$\boldsymbol{\frac{6x^2+5x-1}{2x-1}=3x+4+\frac{3}{2x-1}}$$

Ejemplo 4.14

Divida $6x^4-6x^2-3+8x-x^3$ entre $-2+2x^2+x$.

Solución.

$$
\begin{array}{rll}
 & \quad 3x^2-2x+1 & 6x^4/2x^2=3x^2 \\
2x^2+x-2 & \overline{)\,6x^4-x^3-6x^2+8x-3} & -4x^3/2x^2=-2x \;\; \text{y} \;\; 2x^2/2x^2=1 \\
- & \underline{6x^4+3x^3-6x^2} & =(2x^2+x-2)3x^2 \\
 & \quad -4x^3 \qquad\quad +8x-3 & \text{Se resta} \\
- & \quad \underline{-4x^3-2x^2+4x} & =(2x^2+x-2)(-2x) \\
 & \qquad\quad +2x^2+4x-3 & \text{Se resta} \\
 & \qquad\quad \underline{+2x^2+x-2} & =(2x^2+x-2)(+1) \\
 & \qquad\qquad\quad 3x-1 & \text{Se resta}
\end{array}
$$

El resultado de la división debe escribirse como:

$$\boldsymbol{\frac{6x^4-x^3-6x^2+8x-3}{2x^2+x-2}=3x^2-2x+1+\frac{3x-1}{2x^2+x-2}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.6.

En los siguientes ejercicios, halle el cociente y el residuo, si se divide la primera expresión entre la segunda.

1) $6x^3 + 5x^2 - 4x + 4, \quad 2x + 3$
2) $6x^3 - 5x^2 + 7x - 1, \quad 3x - 1$
3) $10x^3 + x^2 - 8x + 2, \quad 2x + 1$
4) $15x^3 - 8x^2 - 6x + 9, \; 5x + 4$
5) $4x^3 - 2x + 3, \quad 2x - 1$
6) $4x^3 - x + 11, \quad 2x + 3$
7) $6x^3 - 22x + 9, \quad 2x - 4$
8) $8x^3 + 10x + 1, \quad 4x + 2$
9) $2x^4 + 3x^3 + 9x - 7, \quad x^2 + 2x - 1$
10) $2x^4 + 7x^3 + 2x - 1, \quad x^2 + 3x - 1$
11) $3x^4 - 4x^2 + 8x + 3, \quad 3x^2 + 6x + 2$
12) $6x^4 + 13x^3 + 15x - 6, \quad 2x^2 - x + 2$
13) $6x^4 + x^3 + x^2 - 7x - 9, \quad 3x + 2$
14) $3x^4-7x^3-7x^2+5x-7, \quad x-3$
15) $4x^4-11x^2+x+2, \quad 2x+3$
16) $3x^4+11x^3-7x-2, \quad 3x+2$
17) $6x^3+x^2-11x-6, \quad 3x+2$
18) $10x^3+33x^2+14x-15, \quad 2x+5$
19) $6x^4-5x^3-8x^2-x-6, \quad 2x-3$
20) $10x^4+11x^3-26x^2+23x-6, \quad 5x-2$
21) $x^5- 5x^4y+20x^2y^3-16xy^4, \quad x^2-2xy-8y^2$
22) $22x^2y^4- 5x^4y^2+x^5y-40xy^5, \quad x^2y-2xy^2-10y^3$
23) $24x^5 - 52x^4y + 38x^3y^2 -33x^2y^3-26xy^4 +4y^5, \quad 8x^3 - 12x^2y - 6xy^2 +y^3$
24) $x^3 + y^3 +z^3 -3\,xyz, \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$
25) $x^5 + y^5, \quad x^4-x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

Capítulo 5

PRODUCTOS NOTABLES

Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin realizar la multiplicación elemento a elemento.

5.1 El cuadrado de un binomio

La regla para elevar un binomio al cuadrado es la siguiente:

"El cuadrado del primer término más el doble producto del primer término por el segundo más el cuadrado del segundo término".

La fórmula de este producto notable es:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

NOTA.-Debe identificarse adecuadamente el signo de cada término del binomio, para desarrollar correctamente el producto notable.

Ejemplo 5.1

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección.

$$(2x+4y)^2$$

Si a=2x y b=4y, entonces:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x+4y)^2 = (2x)^2 + (2)(2x)(4y) + (4y)^2$$

Simplificando y ordenando en x.

$$\boldsymbol{(2x+4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2}$$

Ejemplo 5.2

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección.

$$(2x^2-6y)^2$$

Si a=2x^2 y b=-6y, entonces:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(2x^2 - 6y)^2 = (2x^2)^2 + (2)(2x^2)(-6y) + (-6y)^2$$

Simplificando y ordenando en x (prestar atención a los signos).

$$\mathbf{(2x^2 - 6y)^2 = 4x^4 - 24xy + 36y^2}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.1.

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1) $(1+b)^2$
2) $(2x+y)^2$
3) $(4a-5b)^2$
4) $\left(\frac{2}{3}l + \frac{3}{5}m\right)^2$
5) $\left(\frac{4}{7}a - \frac{2}{5}m^3\right)^2$
6) $(4xy - 6z)^2$
7) $\left(l + 3m^{3/4}\right)^2$
8) $\left(5x^3 + \frac{2}{7}m^4\right)^2$
9) $(-8x - 5m)^2$
10) $\left(-\frac{3}{8}a - \frac{2}{5}b^3\right)^2$

5.2 El cubo de un binomio

La regla para elevar un binomio al cubo es la siguiente:

"El cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo".

La fórmula de este producto notable es:

$$\mathbf{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

NOTA.-Debe identificarse adecuadamente el signo de cada término del binomio, para desarrollar correctamente el producto notable.

Ejemplo 5.3

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección.

$$(3x+2y)^3$$

Solución.

Si a=3x y b=2y, entonces:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

$$(3x+2y)^3 = (3x)^3 + (3)(3x)^2(2y) + (3)(3x)(2y)^2 + (2y)^3$$

Simplificando:

$$(3x+2y)^3 = 27x^3 + (3)(9x^2)(2y) + (3)(3x)(4y^2) + 8y^3$$

Simplificando y ordenando en x.

$$\boldsymbol{(3x+2y)^3 = 27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3}$$

Ejemplo 5.4

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección.

$$(x^2-3y)^3$$

Solución.

Si a=x^2 y b=-3y, entonces:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

$$(x^2-3y)^3 = (x^2)^3 + (3)(x^2)^2(-3y) + (3)(x^2)(-3y)^2 + (-3y)^3$$

Simplificando (atención con los signos)

$$(x^2-3y)^3 = x^6 + (3)(x^4)(-3y) + (3)(x^2)(9y^2) - 27y^3$$

Simplificando y ordenando en x.

$$\boldsymbol{\left(x^2-3y\right)^3 = x^6 - 9x^4y + 27x^2y^2 - 27y^3}$$

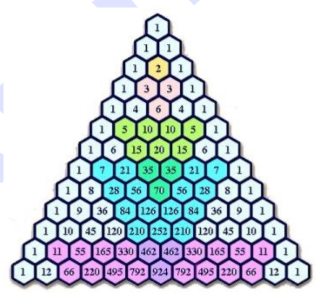
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.2.

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1) $(1+b)^3$	2) $(2x+y)^3$
3) $(4a-5b)^3$	4) $\left(\frac{2}{3}l+\frac{3}{5}m\right)^3$
5) $\left(\frac{4}{7}a-\frac{2}{5}m^3\right)^3$	6) $(4xy-6z)^3$
7) $\left(l+3m^{3/4}\right)^3$	8) $\left(5x^3+\frac{2}{7}m^4\right)^3$
9) $(-8x-5m)^3$	10) $\left(-\frac{3}{8}a-\frac{2}{5}b^3\right)^3$

5.3 Binomio elevado a la potencia n (Triángulo de Pascal)

Elevar un binomio a la potencia n se puede obtener por medio del triángulo de Pascal el cual se presenta en la siguiente figura.



Triángulo de Pascal

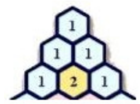
Para obtener este triángulo es necesario comenzar con tres elementos iguales a 1 como se muestra a continuación.

El segundo renglón (comenzamos a numerar los renglones de cero) lo obtenemos poniendo en las orillas el valor de 1.

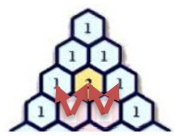
Poner valores de 1 Poner valores de 1

El término intermedio se obtiene de la suma de los números que se encuentran encima.

Para este caso el lugar que tenemos vacío se llenara con la suma de 1+1 = 2, de tal manera que tenemos:

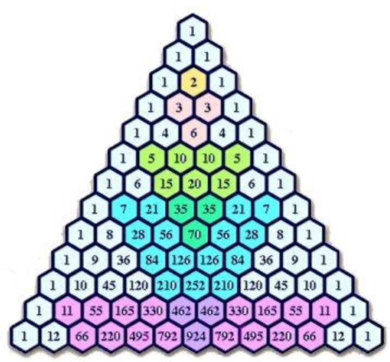


El siguiente renglón nuevamente colocamos los valores de uno en las orillas.



Para ambos espacios vacíos se tiene que sobre estos espacios los valores que están encima son 1 y 2 por lo que tenemos 1+2=3 quedando de la siguiente manera:

Así podemos continuar hasta obtener el triángulo tan grande como lo necesitemos.



A partir del triángulo de pascal podemos desarrollar la potencia de un binomio a la potencia n con los siguientes pasos:

Un binomio la potencia n tiene la forma: $(a+b)^n$.

Ejemplo 5.5

A continuación, se presenta un ejemplo para una potencia 4, es decir n=4.

$$(a+b)^4$$

1.- Al elevar el binomio a la potencia n, se obtendrá un polinomio con n+1 elementos. Para nuestro ejemplo n vale 4, por lo que el resultado tendrá 4+1 elementos; de tal forma que debemos escribir 5 espacios de la siguiente manera:

$$(a+b)^4 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_\_$$

2.- Colocamos en cada espacio el producto de los términos del binomio. En nuestro ejemplo tenemos a y b.

$$(a+b)^4 = ab + ab + ab + ab + ab$$

3.- Empezamos por colocar los exponentes primero a la primera variable empezando del exponente máximo en este caso "4" debido a que n=4 reduciendo uno en cada espacio hasta llegar al último en "0".

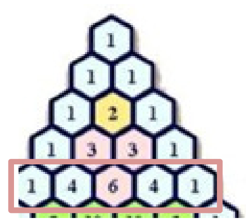
$$(a+b)^4 = a^4b + a^3b + a^2b + a^1b + a^0b$$

4.- Ahora empezamos con la segunda variable del binomio, colocando los exponentes de manera inversa empezando ahora de menor a mayor, en este caso empezando de "0" y sumando uno en cada espacio hasta llegar hasta "4" en el último lugar.

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + a^3b^1 + a^2b^2 + a^1b^3 + a^0b^4$$

5.- Ahora, utilizando el triángulo de Pascal, colocamos en cada espacio el número que corresponda al renglón del triángulo con el que se relaciona, en este caso, como el exponente es "4", utilizamos los números del renglón "4". *Debemos tener cuidado al numerar los renglones; debemos empezar de cero.*

Renglón 0
Renglón 1
Renglón 2
Renglón 3
Renglón 4



Observamos que en el renglón 4 tenemos los números 1, 4, 6, 4, 1; los cuales debemos colocar en cada uno de los espacios de la siguiente manera:

$$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4b^0 + \mathbf{4}a^3b^1 + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}a^1b^3 + \mathbf{1}a^0b^4$$

6.- Ahora simplificamos la expresión (recordemos que cualquier término elevado a la potencia cero es igual a uno).

$$(a+b)^4 = \mathbf{1}a^4b^0 + \mathbf{4}a^3b^1 + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}a^1b^3 + \mathbf{1}a^0b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + \mathbf{4}a^3b + \mathbf{6}a^2b^2 + \mathbf{4}ab^3 + b^4$$

Ejemplo 5.6

Escribir por simple inspección, el resultado de:

$$(2x-4y)^5$$

Solución.

Para este ejercicio n=5, por lo que colocamos n+1 espacios.

$$(2x-4y)^5 = \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_\_\_$$

Colocamos en cada espacio el producto de cada término del binomio.

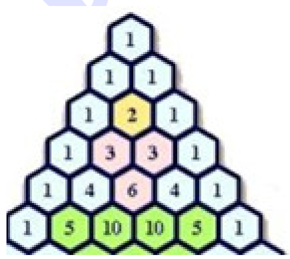
$$(2x-4y)^5 = (2x)(-4y) + (2x)(-4y) + (2x)(-4y) + (2x)(-4y) + (2x)(-4y)$$

Colocamos los exponentes a cada uno de los términos; el primero ascendente y el segundo descendente.

$$= (2x)^5(-4y)^0 + (2x)^4(-4y)^1 + (2x)^3(-4y)^2 + (2x)^2(-4y)^3 + (2x)^1(-4y)^4 + (2x)^0(-4y)^5$$

Utilizamos el triángulo de Pascal para poner cada uno de los factores de los términos.

Renglón 0
Renglón 1
Renglón 2
Renglón 3
Renglón 4
Renglón 5



El renglón 5 tiene los términos 1, 5, 10, 10, 5 y 1; los cuales colocaremos en cada uno de los términos.

$$= 1(2x)^5(-4y)^0 + 5(2x)^4(-4y)^1 + 10(2x)^3(-4y)^2 + 10(2x)^2(-4y)^3 + 5(2x)^1(-4y)^4 + 1(2x)^0(-4y)^5$$

Simplificamos la expresión.

$$\boldsymbol{(2x-4y)^5 = 32x^5 - 320x^4y + 1280x^3y^2 - 2560x^2y^3 + 2560xy^4 - 1024y^5}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.3.

a) Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1	$(x+b)^4$	2	$(2x+3y)^4$
3	$(4a-5b)^5$	4	$(-8x-5m)^5$
5	$\left(\frac{4}{7}a-\frac{2}{5}m^3\right)^4$	6	$\left(5x^3+\frac{2}{7}m^4\right)^3$

b) Halle los primeros cuatro términos en el desarrollo binomial de $\left(3c^{2/5}+c^{4/5}\right)^6$

c) Obtenga los últimos dos términos del desarrollo de $(4b^{-1}-3b)^{15}$

d) Obtenga el quinto término del desarrollo de $\left(3a^2+\sqrt{b}\right)^9$

e) Obtenga el séptimo término del desarrollo de $\left(\frac{1}{2}u-2v\right)^{10}$

5.4 Producto de binomios conjugados

Un binomio conjugado es el binomio de la forma:

$$(a+b)(a-b)$$

Se observa que ambos binomios tienen los mismos elementos con signos diferentes.

Al realizar el producto de binomios multiplicando cada elemento del primer binomio por cada elemento del segundo binomio se tiene:

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2$$

Simplificando se tiene:

$$\boldsymbol{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

De tal forma que el producto de binomios conjugados lo podemos obtener con la siguiente regla:

"El cuadrado del primer término, menos el cuadrado del segundo término".

Ejemplo 5.7

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección:

$$\boldsymbol{(5x+3y)(5x-3y)}$$

Solución.

Para este caso a=5x y b=3y

Aplicando la regla para productos notables se tiene:

$$(5x+3y)(5x-3y)=(5x)^2-(3y)^2$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{(5x+3y)(5x-3y)=25x^2-9y^2}$$

Ejemplo 5.8

Desarrolle el siguiente producto notable por simple inspección:

$$\boldsymbol{(3mn+4)(3mn-4)}$$

Solución.

Para este caso a=3mn y b=4

Aplicando la regla para productos notables se tiene:

$$(3mn+4)(3mn-4)=(3mn)^2-(4)^2$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{(5x+3y)(5x-3y)=9m^2n^2-16}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.4

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1) $(5x+4y)(5x-4y)$

2) $(3a+7b)(3a-7b)$

3) $(-7x+3y)(7x+3y)$

4) $(4r+9s)(-4r+9s)$

5) $\left(\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}y\right)\left(\frac{3}{4}y+\frac{5}{4}x\right)$

6) $\left(-\frac{3}{7}x-\frac{5}{8}y\right)\left(-\frac{5}{8}y+\frac{3}{7}x\right)$

7) $(3xy + 8yz)(3xy - 8yz)$ 8) $(9x^2 - 3y^4)(-3y^4 - 9x^2)$

9) $(3ab + 3ac)(-3ab + 3ac)$ 10) $(3x^2y^4 - 3yz^2)(-3x^2y^4 - 3yz^2)$

5.5 Producto de binomios con un término común

El producto de binomios con un término común tiene la forma:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})$$

Al realizar el producto de binomios con un término común multiplicando cada elemento del primer binomio por cada elemento del segundo binomio se tiene:

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} + \mathrm{c}) = \mathrm{a}^2 + \mathrm{ac} + \mathrm{ba} + \mathrm{bc}$$

Factorizando obtenemos:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bc}$$

De tal forma que el producto de binomios con un término común lo podemos obtener con la siguiente regla:

"El cuadrado del término común, más la suma álgebraica de los términos no comunes multiplicada esta por el término común, más el producto de los términos no comunes"

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}^2 + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bc}$$

Cuadrado del término común

Producto de los términos no comunes

Suma álgebraica de los términos no comunes

Multiplicar por el término común

Ejemplo 5.9

Desarrolle el producto notable $(x - 2y)(x + y)$

Solución.

Para este producto de binomios el término común a=x

Términos NO comunes b=-2y c=y Entonces:

$$(x - 2y)(x + y) = (x)^2 + (-2y + y)x + (-2y)(y)$$

Simplificando:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{2y})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{xy} - \boldsymbol{2y}^2$$

Ejemplo 5.10

Desarrolle el producto notable $(4w-8)(4w-2)$

Solución.

Término común a=4w

Términos NO comunes b=-8 c=-2 Entonces:

$$(4w-8)(4w-2) = (4w)^2 + (-8-2)4w + (-8)(-2)$$

Simplificando:

$$(4w-8)(4w-2) = \mathbf{16w^2 - 40w + 16}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.5

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1) $(y+1)(y+2)$
2) $(a-8x)(a+2x)$
3) $(a-4x)(a-6x)$
4) $(2a+3x)(2a+2x)$
5) $(8a-5x)(8a-x)$
6) $(4x-2y)(2x-2y)$
7) $(2r^2-3s^3)(2r^2-2s^3)$
8) $(-2z+8y^3)(8y^3+3z)$
9) $(12a-9b)(-9b-2a)$
10) $(4f-2g)(4f-5g)$

Capítulo 6

FACTORIZACIÓN

Factorizar o descomponer en factores una expresión álgebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.

No todos los polinomios se pueden descomponer en dos o más factores.

6.1 Factor común de un polinomio

Para poder realizar este tipo de factorización necesitamos determinar el Máximo Común Divisor (MCD)

El máximo común divisor (MCD) de dos o más expresiones álgebraicas, es la expresión álgebraica de mayor coeficiente numérico y de mayor grado que está contenida exactamente en cada una de ellas.

A continuación, se presenta algunos ejemplos para determinar el MCD.

Ejemplo 6.1

Determinar el MCD de las siguientes expresiones:

$$48a^4bc^3 \qquad\qquad 60a^2b^3c^2$$

Obtenemos la factorización en factores primos de los números 48 y 60.

48	2	60	2
24	2	30	2
12	2	15	3
6	2	5	5
3	3	1	
1			

El MCD de estos dos números se obtiene al ***multiplicar los factores comunes***.

$$(2)(2)(3) = 12$$

De las variables se toma la variable y el ***MENOR*** exponente entre ellos:

De a^4 y a^2 es a^2

De b y b^3 es b

De c^3 y c^2 es c^2

De tal manera que el MCD de las expresiones $48a^4bc^3$ y $60a^2b^3c^2$ es $12a^2bc^2$

El MCD nos sirve para factorizar el polinomio como un producto de su MCD y otro polinomio más sencillo que el original.

Ejemplo 3.2

Factorizar la expresión álgebraica $20a^3b^2 - 45a^2b^5$

Solución.

El MCD de 20 y 45 es 5.

El MCD de a^3 y a^2 es a^2.

El MCD de b^2 y b^5 es b^2.

El MCD de $20a^3b^2 - 45a^2b^5$ es$5a^2b^2$.

Utilizando el MCD obtenido se escribe como primer factor y se ***calcula*** el segundo factor. Entonces la factorización queda como:

$$\boldsymbol{20a^3b^2 - 45a^2b^5 = (5a^2b^2)(4a - 9b^3)}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.1.

Factorizar las siguientes expresiones álgebraicas:

1) $14x^2 - 42xy$
2) $24x^3y^4z^3 + 18x^4y^2$
3) $30a^3y^2z^5 + 12a^5y^3z^2$
4) $30a^3b^5c^7 - 22a^6b^2c^4$
5) $34a^6b^7x^2 - 30a^2x^3z^4$
6) $65x^3y^5z^3 - 104x^2y^5z^2$
7) $90x^5y^8z^4 - 30x^5y^6z^3$
8) $160x^7y^5z^5 + 40x^4y^5z^9$
9) $112a^{11}b^9c^4 + 144a^{11}b^6c^{12}$
10) $48q^8r^{10}s^5 - 80q^8r^6s^7$

6.2 Factorización por agrupamiento

A menudo, los términos en un polinomio se pueden agrupar en tal forma que cada grupo tiene un factor común. Para factorizar esos polinomios, se comienza agrupando aquellos términos que tengan un factor común y luego se aplica la ley distributiva para completar la factorización.

Ejemplo 6.3

Factorizar la expresión álgebraica $ax + bx - ay - by$.

Solución.

Los dos primeros términos tienen el factor común x y los dos últimos tienen el factor común y. Por tanto, se agrupan el primero y el segundo términos, así como los dos últimos, obteniéndose:

$$ax + bx - ay - by = (ax + bx) - (ay + by)$$

$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b)$$

$$\boldsymbol{ax + bx - ay - by = (a + b)(x - y)}$$

Ejemplo 6.4

Factorizar la expresión álgebraica $8xz - 4xy - 14z + 7y$

Solución.

Los dos primeros términos tienen el factor común 4x y los dos últimos tienen el factor común −7. Por tanto, se agrupan el primero y el segundo términos, así como los dos últimos, obteniéndose:

$$8xz - 4xy - 14z + 7y = (8xz - 4xy) + (-14z + 7zy)$$

$$8xz - 4xy - 14z + 7y = 4x(2z - y) - 7(2z - y)$$

$$8xz - 4xy - 14z + 7y = (4x - 7)(2z - y)$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.2.

Factorizar las siguientes expresiones álgebraicas por agrupamiento:

1) $15xz - 6x + 5yz - 2y$
2) $6ab + 2ac + 12b + 4c$
3) $10wy + 15wz + 4xy + 6xz$
4) $14wy - 49wz + 6xy - 21xz$
5) $6ac - 9bc - 16ad + 24bd$
6) $wx + wy - 4x - 4y$
7) $-7xz + 28x + yz - 4y$
8) $6xz + 4yz + 48x + 32y$
9) $40xz - 56x + 25yz - 35y$
10) $12wy - 10yz - 54w + 45z$

6.3 Factorización de una diferencia de cuadrados perfectos

En la sección 2.4 se desarrolló el producto notable $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ y de manera recíproca se puede enunciar la siguiente regla para factorizar una diferencia de cuadrados.

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo, a continuación, se escribe el producto de la suma por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplo 6.5

Factorizar la diferencia de cuadrados z^2-9.

Solución.

La raíz cuadrada de z^2 es z

La raíz cuadrada de 9 es 3.

Posteriormente, se escribe el producto de la suma por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

$$\boldsymbol{z^2-9=(z+3)(z-3)}$$

Ejemplo 6.6

Factorizar la diferencia de cuadrados $4x^2-(x+y)^2$

Solución.

La raíz cuadrada de $4x^2$ es 2x

La raíz cuadrada de $(x+y)^2$ es $(x+y)$.

En seguida, se escribe el producto de la suma por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

$$4x^2-(x+y)^2=[2x+(x+y)][2x-(x+y)]$$

$$\boldsymbol{4x^2-(x+y)^2=(3x+y)(x-y)}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.3.

Factorizar las siguientes expresiones álgebraicas:

1) $9y^2 - (a+b)^2$ 2) $25x^4 - (3x+y)^2$ 3) $(4a^2)^2 - (a^2+b^2)^2$

4) $\frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{16}y^2$ 5) $9x^2y^2 - 64y^2z^2$ 6) $36y^8 - (2a+y^4)^2$

6.4 Factorización de un trinomio cuadrado perfecto.

Un trinomio es cuadrado perfecto (TCP) cuando se obtiene de elevar al cuadrado un binomio.

Para conocer si un trinomio ordenado con respecto a una letra es un trinomio cuadrado perfecto (TCP) se debe verificar que cumpla las siguientes condiciones:

1. *Se verifica si el primero y tercero términos son cuadrados perfectos y positivos, es decir, que tienen raíz cuadrada exacta.*
2. *Se verifica si el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas.*

Es importante recordar que para extraer la raíz cuadrada de un monomio se extrae la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de cada letra entre 2.

Ejemplo 6.7

Verificar si el trinomio $9x^2 + 12xy + 4y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto (TCP)

Solución.

Primera condición: Verificar si el primero y tercero términos son cuadrados perfectos y positivos.

La raíz cuadrada de $9x^2$ se obtiene al extraer la raíz cuadrada de su coeficiente y se divide el exponente de la variable entre 2.

De tal manera que la raíz cuadrada de $9x^2$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{x^2} = x^{2/2} = x$$

La raíz cuadrada del primer término es 3x.

Y se obtiene la raíz cuadrada de $4y^2$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{y^2} = y^{2/2} = y$$

La raíz cuadrada del tercer término es 2y.

El primer y tercer miembro tiene raíz cuadrada exacta por lo que cumple la primera condición.

Segunda condición: Verificar si el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas del primer y tercer término.

El segundo término es 12xy.

$$12xy = (2)(3x)(2y)$$

Raíz cuadrada del segundo elemento

Doble producto

Raíz cuadrada del primer elemento

Simplificando lo anterior tenemos:

$$12xy = 12xy \quad \text{Cumple la segunda condición}$$

Debido a que ambas condiciones <u>***se cumplen***</u> se tiene que $9x^2 + 12xy + 4y^2$ <u>***es un trinomio cuadrado perfecto.***</u>

Y esto es cierto debido a que $9x^2 + 12xy + 4y^2$ se obtiene al elevar al cuadro el binomio $(3x + 2y)^2$, es decir:

$$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

Regla para factorizar un trinomio cuadrado perfecto.

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto es necesario realizar los siguientes pasos:

1. Se extrae la raíz cuadrada al primero y tercer término del trinomio
2. Se separan estas raíces por el signo del segundo término.
3. Se eleva toda la expresión al cuadrado.

Ejemplo 6.8

Factorizar el trinomio $x^2 + 2xy + y^2$

Solución.

Comprobamos si es un TCP.

Raíz cuadrada del primer término (x^2) es x   Raíz cuadrada del tercer término (y^2) es y

Verificamos si el segundo término (2xy) es el doble producto de sus raíces cuadradas del primer y tercer término.

$$2xy = 2(x)(y) \qquad \text{Si es un TCP}$$

Después de comprobar que se trata de un TCP aplicamos la regla de factorización y se obtiene:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Elevamos al cuadrado la expresión

Raíz cuadrada del 1er término

Raíz cuadrada del 2do término

Signo del segundo término

Ejemplo 6.9

Factorizar el trinomio $m^2 + bm + \frac{b^2}{4}$

Solución.

Comprobamos si es un TCP.

Raíz cuadrada del primer término (m^2) es m   Raíz cuadrada del tercer término $\left(\frac{b^2}{4}\right)$ es $\frac{b}{2}$

Verificamos si el segundo término (bm) es el doble producto de sus raíces cuadradas del primer y tercer término.

$$bm = 2(m)\left(\frac{b}{2}\right)$$

$$bm = bm \qquad \text{Si es un TCP}$$

Después de comprobar que se trata de un TCP aplicamos la regla de factorización y se obtiene:

$$m^2 + bm + \frac{b^2}{4} = \left(m + \frac{b^2}{4}\right)^2$$

Elevamos al cuadrado la expresión

Raíz cuadrada del 2do término

Raíz cuadrada del 1er término

Signo del segundo término

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.4.

Factorizar los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

1) $x^2 + 10x + 25$

2) $a^2 - 16a + 64$

3) $\frac{9}{25}r^2 + \frac{9}{10}r + \frac{9}{16}$

4) $\frac{4}{9}m^2 - m + \frac{9}{16}$

5) $\frac{9}{25}l^4 + \frac{36}{5}l^2 + 36$

6) $6x^2 - 8x + 4$

7) $\frac{9}{64}x^6 + \frac{7}{8}x^3 + \frac{49}{36}$

8) $\frac{64}{9}x^6 + 16x^5 + 9x^4$

9) $\frac{36}{49}x^4 - \frac{36}{49}x^2 + \frac{9}{49}$

10) $\frac{49}{81}x^4 + \frac{10}{9}x^2 + \frac{25}{49}$

6.5 Factorización de un trinomio, completándolo a trinomio cuadrado perfecto.

Si al intentar factorizar un trinomio, se comprueba que no es trinomio cuadrado perfecto, puede completarse a trinomio cuadrado perfecto, sumando y restando la expresión álgebraica necesaria, lo que permitirá su posterior factorización.

Ejemplo 6.10

Factorizar el trinomio $x^4 + x^2y^2 + y^4$

Solución.

Comprobamos *si se trata de un TCP*

Raíz cuadrada del primer término (x^4) es x^2.

Raíz cuadrada del segundo término (y^4) es y^2.

Verificamos si el segundo término (x^2y^2) es el doble producto de sus raíces cuadradas del primer y tercer término.

$$x^2y^2 \neq 2(x^2)(y^2)$$

$$x^2y^2 \neq 2(x^2)(y^2) \qquad \text{NO es un TCP}$$

Para ***completar*** el TCP, es necesario sumar y restar al trinomio, en este caso x^2y^2

Para que fuese un trinomio cuadrado perfecto debería ser: $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, es decir falta un factor x^2y^2.

Para ello sumamos el factor que necesitamos y de la misma forma le restamos esa misma cantidad ("sumar cero").

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + x^2y^2 + y^4 + \boldsymbol{x^2y^2} - \boldsymbol{x^2y^2}$$

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = \underbrace{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{\text{Trinomio Cuadrado Perfecto}} - \boldsymbol{x^2y^2}$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto como se vio en la sección anterior nos queda:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - \boldsymbol{x^2y^2}$$

NOTA: Esta expresión es posible seguir factorizando (Ver tema 3.3.- Factorización de una diferencia de cuadrados perfectos) de tal manera que:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2$$

Factorizando como una diferencia de cuadrados perfectos el cual nos dice que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Para este ejemplo $a = x^2 + y^2$ y $b = xy$ de tal manera que:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - (xy)^2 = [(x^2 + y^2) + (xy)][(x^2 + y^2) - (xy)]$$

Ordenando tenemos:

$$\boldsymbol{x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + \mathrm{xy} + y^2)(x^2 - \mathrm{xy} + y^2)}$$

Ejemplo 6.11

Factorizar el trinomio $81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16}$

Solución.

Verificamos si se trata de un TCP

Raíz cuadrada del primer término ($81a^4\,b^8$) es $9\,a^2b^4$.

Raíz cuadrada del segundo término $(256x^{16})$ es $16x^8$.

Verificamos si el segundo término ($292a^2b^4x^8$) es el doble producto de sus raíces cuadradas del primer y tercer término.

$$292a^2b^4x^8 \neq 2(9a^2b^4)(16x^8)$$

$$292a^2b^4x^8 \neq 288a^2b^4x^8 \qquad \text{NO es un TCP}$$

Para completar el TCP, es necesario sumar y restar al trinomio, en este caso $4a^2b^4x^8$

$$81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16} + \mathbf{4a^2b^4x^8} - \mathbf{4a^2b^4x^8}$$

$$\underbrace{81a^4b^8 - 288a^2b^4x^8 + 256x^{16}}_{\text{Trinomio Cuadrado Perfecto}} - 4a^2b^4x^8$$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto como se vio en la sección anterior y nos queda:

$$81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16} = (9a^2b^4 - 16x^8)^2 - 4a^2b^4x^8$$

$$81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16} = (9a^2b^4 - 16x^8)^2 - (2ab^2x^4)^2$$

NOTA: Esta expresión es posible seguir factorizando como una diferencia de cuadrados el cual nos dice que:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Para este ejemplo a $= 9a^2b^4 - 16x^8$ y $b = 2ab^2x^4$ de tal manera que:

$$81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16} = \left[(9a^2b^4 - 16x^8) + \left(2ab^2x^4\right)\right]\left[(9a^2b^4 - 16x^8) - \left(2ab^2x^4\right)\right]$$

$$\boldsymbol{81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16} = (9a^2b^4 - 16x^8 + 2ab^2x^4)(9a^2b^4 - 16x^8 - 2ab^2x^4)}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.5

Factorizar los siguientes trinomios cuadrados.

1) $x^8 + 3x^4 + 4$

2) $x^4 - 6x^2 + 1$

3) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$

4) $36x^4 - 109x^2y^2 + 49y^4$

5) $4a^8 - 53a^4b^4 + 49b^8$

6) $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$

7) $16 - 9c^4 + c^8$

8) $225 + 5m^2 + m^4$

9) $49c^8 + 75c^4m^2n^2 + 196m^4n^4$

10) $81a^4b^8 - 292a^2b^4x^8 + 256x^{16}$

6.6 Factorización de un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Ahora se buscarán los factores del polinomio $ax^2 + bx + c$ que tengan la forma:

$$(px + q)(rx + s)$$

Y se supondrá que todos los coeficientes son enteros. Para lograr esto en forma eficiente, es útil escribir los factores de a por pares y los factores de c por pares, ya que deberá cumplirse que:

1. Dos números multiplicados (pr) den el primer factor (a), es decir, pr = a
2. Dos números multiplicados (qs) den el tercer factor (c), es decir, qs = c
3. La suma del producto de los números obtenidos da el segundo factor (b): (ps+qr) = b

Estas relaciones parecen complicadas para obtener, sin embargo, es útil tomar en cuenta las siguientes consideraciones para facilitar el proceso.

Es útil conocer el patrón de signos ya que de esa manera se eliminan algunas de las posibilidades. Además, se puede suponer que a > 0, ya que siempre es posible, si se requiere, factorizar un −1, es decir si el primer factor es negativo se recomienda multiplicar todo el trinomio por -1 para facilitar el procedimiento.

Por ejemplo

$$-5x^2 + 8x + 4 = -(5x^2 - 8x - 4)$$

Si c > 0 (si C es positivo), los signos en cada uno de los factores de $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ deben tener el mismo signo para que C de positivo:

$$(+)(+) \qquad \text{si } b > 0$$

$$(-)(-) \qquad \text{si } b < 0$$

Sin embargo, si c < 0 (Si C es negativo), los signos en cada factor deben ser diferentes:

$$(+)(-) \qquad \text{ó} \qquad (-)(+)$$

Ejemplo 6.12

Factorice el trinomio $x^2 + 5x + 6$

Solución.

Se deben escribir dos factores de la forma:

$$(\boxed{p}x + \boxed{q})(\boxed{r}x + \boxed{s})$$

Ya que a=1, b = 5 y c = 6 son positivos.

Primero se buscan las posibles factorizaciones de c = 6 (Estos factores serán q y s)

6 = (1)(6)

6 = (2)(3)

También se buscan los factores de a=1 (Estos factores serán p y r) para este caso no es complicado debido a que:

1 = (+1)(+1)

1 = (-1)(-1)

Después de los factores obtenidos se buscan aquellos que cumplan la condición (ps+qr)=b de tal manera que para este caso se buscan los factores (ps+qr)=5:

$$(+1)(+2) + (+1)(+3) = 5$$

Se completa la factorización, escribiendo en cada espacio los números encontrados.

$$x^2 + 5x + 6 = (1x + 2)(1x + 3)$$

Simplificando se tiene:

$$\boldsymbol{x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)}$$

Ejemplo 6.13

Factorice el trinomio $x^2 + 5x - 14$

Solución.

Para este ejercicio se tiene que a=1, b = 5 y c = −14.

Se deben escribir dos factores de la forma:

$$(\boxed{p}x + \boxed{q})(\boxed{r}x + \boxed{s})$$

Se observa que debe ser un elemento de la factorización con signo positivo y otro con signo negativo debido a que c=-14 y para obtener el signo negativo de c la multiplicación debe ser de signos contrarios.

Se buscan las posibles factorizaciones de -14

-14 = (+1)(-14)	-14 = (+2)(-7)
-14 = (-1)(+14)	-14 = (-2)(+7)

También se buscan los factores de a=1 (Estos factores serán p y r) para este caso no es complicado debido a que:

1 = (+1)(+1)

1 = (-1)(-1)

Después de los factores obtenidos se buscan aquellos que cumplan la condición (ps+qr)=b de tal manera que a prueba y error se obtiene:

$$(+1)(+7) + (+1)(-2) = +5$$

Escribimos la factorización:

$$x^5 + 5x - 14 = (1x + 7)(1x - 2)$$

Simplificando:

$$\boldsymbol{x^2 + 5x - 14 = (x + 7)(x - 2)}$$

Ejemplo 6.14

Factorice el trinomio. $15x^2 + 11x - 12$

Solución.

Para este ejercicio se tiene que a=15, b = 11 y c = −12.

Se deben escribir dos factores de la forma:

$$(\boxed{p}x + \boxed{q})(\boxed{r}x - \boxed{s})$$

Se observa que debe ser un elemento de la factorización con signo positivo y otro con signo negativo debido a que c=-12 y para obtener el signo negativo de c la multiplicación debe ser de signos contrarios, estos valores que se obtienen serán q y s.

Se buscan las posibles factorizaciones de -12

12 = (+1)(-12)	Estos factores
12 = (-1)(+12)	son los valores
12 = (+2)(-6)	q y s para la
12 = (-2)(+6)	factorización

12 = (+3)(-4)

12 = (-3)(+4)

Se observa que para este ejemplo el valor de a=15 por lo que también se deben buscar sus factores. Se buscan las posibles factorizaciones de 15 para obtener los valores de p y r.

15 = (+1)(+15)	Estos factores
15 = (-1)(-15)	son los valores
15 = (+3)(+5)	p y r para la
15 = (-3)(-5)	factorización

Además, se debe cumplir que (ps+qr)=b siendo b=11. Al intentar diversas posibilidades se ve que:

$$(+3)(-3)+(+4)(+5)=+5$$

$$-9+20=+11$$

De tal manera que la factorización real es:

$$\mathbf{15x^2+11x-12=(3x+4)(5x-3)}$$

Es conveniente poder determinar si un trinomio cuadrático es factorizable sin conocer los factores. Más adelante, al trabajar con la fórmula cuadrática, se mostrará que, si a, b y c son enteros, $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$ es factorizable con coeficientes enteros si y sólo si $\boldsymbol{b^2-4ac}$ es un cuadrado perfecto.

En el primer ejemplo, a = 1, b = 5 y c = 6, por lo que:

$$b^2-4ac=5^2-4(1)(6)=25-24=1$$

Y 1 es un cuadrado perfecto (tiene raíz cuadrada exacta).

En el ejemplo 2, a = 1, b = 5 y c = −14, por lo que:

$$b^2-4ac=5^2-4(1)(-14)=25+56=81$$

Y 81 es un cuadrado perfecto, su raíz es 9.

En el ejemplo 3, a = 15, b = 11 y c = −12, por lo que

$$b^2-4ac=11^2-4(15)(-12)=121+720=841$$

Y 841 es un cuadrado perfecto, su raíz es 29.

Ejemplo 6.15

¿Es factorizable el trinomio $7x^2 - 12x + 4$?

Solución.

a= 7, b =−12 y c = 4, por lo que:

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(7)(4) = 144 - 112 = 32$$

Y 32 no tiene raíz cuadrada exacta, por lo que 32 no es cuadrado perfecto y el trinomio no es factorizable con coeficientes enteros.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.6

Factorizar los siguientes polinomios.

1) $x^2 + 11x + 28$
2) $x^2 + 7x - 8$
3) $x^2 - 15x + 54$
4) $3x^2 + 4x - 20$
5) $10x^2 + 37x - 36$
6) $20x^2 + 76x + 48$
7) $-140x^2 + 374x - 240$
8) $-105x^2 + 503x - 450$
9) $x^4 - 10x^2 + 16$
10) $14x^2 - 43x - 21$

6.7 Factorización de un polinomio por el método de evaluación. (División Sintética)

La división sintética se puede utilizar para dividir una función polinómica por un binomio de la forma x-c. Esto nos permite, por ejemplo, hallar el cociente y el resto que se obtiene al dividir el polinomio por x-c. Además, por el teorema del resto al aplicar la división sintética se obtiene el valor funcional del polinomio. También permite encontrar los factores y ceros de un polinomio. Al encontrar los ceros de un polinomio, éste se puede factorizar completamente y expresar como el producto de sus factores lineales. En resumen, la división sintética juega un papel preponderante en la división de un polinomio por un factor lineal de la forma x-c.

Ejemplo 6.16

Factorizar por división sintética el siguiente polinomio:

$$-6x^2 + x^3 + 30 - x$$

Solución.

Debemos ordenar el polinomio por el grado de cada variable de mayor a menor quedando de la forma:

$$x^{3}-6x^{2}-x^{1}+30$$

Tomamos el coeficiente de cada uno de los términos del polinomio

$$+\mathbf{1}x^{3}-\mathbf{6}x^{2}-\mathbf{1}x^{1}+\mathbf{30}$$

+1 -6 -1 +30 Coeficientes ordenados

Multiplicamos los extremos $(+1)(+30)=\mathbf{+30}$

Encontramos los múltiplos de **30.**

$(+\mathbf{1})(+30)$ $+(2)(+15)$ $(+3)(+10)$ $(+5)(+6)$

$(-1)(-30)$ $(-2)(-15)$ $(-3)(-10)$ $(-5)(-6)$

Tomamos nuevamente los coeficientes de cada uno de los términos del polinomio ordenado.

+1	-6	-1	+30

Seleccionamos UNO de los múltiplos encontrados (cualquiera). Vamos a intentar con el factor 1 y los escribimos de la siguiente manera:

+1	-6	-1	+30	**+1**

Bajamos el primer coeficiente:

+1	-6	-1	+30	**+1**
+1				

Multiplicamos el coeficiente que se bajó por el factor seleccionado. Para este caso (+1)(+1)=+1 y el resultado lo escribimos de la siguiente manera.

+1	-6	-1	+30	**+1**
	+1			
+1				

Realizamos la suma.

$$\begin{array}{cccc|c} +1 & -6 & -1 & +30 & \color{red}{+1} \\ +1 & & & & \\ \hline +1 & \color{red}{-5} & & & \end{array}$$

Multiplicamos el resultado de la suma por el coeficiente seleccionado (-5)(+1)=-5 y lo escribimos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc|c} +1 & -6 & -1 & +30 & \color{red}{+1} \\ & +1 & \color{red}{-5} & & \\ \hline +1 & -5 & & & \end{array}$$

Realizamos la suma:

$$\begin{array}{cccc|c} +1 & -6 & -1 & +30 & \color{red}{+1} \\ & +1 & -5 & & \\ \hline +1 & -5 & \color{red}{-6} & & \end{array}$$

Multiplicamos el resultado de la suma por el coeficiente seleccionado (-6)(+1)=-6 y lo escribimos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{cccc|c} +1 & -6 & -1 & +30 & \color{red}{+1} \\ & +1 & -5 & \color{red}{-6} & \\ \hline +1 & -5 & -6 & & \end{array}$$

Realizamos la suma:

$$\begin{array}{cccc|c} +1 & -6 & -1 & +30 & \color{red}{+1} \\ & +1 & -5 & -6 & \\ \hline +1 & -5 & -6 & \color{red}{+24} & \end{array}$$

El resultado final es 24, esperamos como resultado CERO por lo que esta selección no fue adecuada.

Debemos seleccionar un nuevo factor.

$(+\mathbf{1})(+30)$ $\quad +(2)(+15)$ $\quad (+3)(+10)$ $\quad (+5)(+6)$

$(-1)(-30)$ $\quad (-2)(-15)$ $\quad (-3)(-10)$ $\quad (-5)(-6)$

Vamos a intentar con el factor 2 y los escribimos de la siguiente manera:

+1	-6	-1	+30	**+2**

Repetimos todos los pasos anteriormente descritos quedándonos de la siguiente manera:

+1	-6	-1	+30	**+2**
	+2	-8	-18	
+1	-4	-9	**+12**	

El resultado final es 12, esperamos como resultado CERO por lo que esta selección no fue adecuada.

Vamos a intentar con el factor -2 y los escribimos de la siguiente manera:

+1	-6	-1	+30	**-2**
	-2	+16	-30	
+1	-8	+15	**0**	

Tenemos un factor adecuado el cual es -2. De tal manera que el polinomio original se puede escribir de la siguiente manera:

$$x^n + x^{n-1} + \cdots + x + a = (x - c)(b \cdot x^{n-1} + c \cdot x^{n-2} + \cdots + d \cdot x + e)$$

Siendo C el factor encontrado; b, c, d, e los coeficientes obtenidos en la división sintética.

+1	-6	-1	+30	**-2**
	-2	+16	-30	
+1	-8	+15	**0**	

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = [x - (\mathbf{-2})][\mathbf{1}x^{3-1} + (\mathbf{-8})x^{2-1} + \mathbf{15}x^{1-1}]$$

Escribimos el polinomio de la siguiente manera:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x^2 - 8x + 15)$$

Nuevamente aplicamos la división sintética con el polinomio de segundo grado que obtuvimos.

Buscamos los factores de 15 los cuales son:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(+\mathbf{1}x^2 - \mathbf{8}x + \mathbf{15})$$

$$(+1)(+15) \qquad (+3)(+5)$$

$$(-1)(-15) \qquad (-3)(-5)$$

Tomamos nuevamente los coeficientes de cada uno de los términos del polinomio ordenado.

+1	-8	+15	**+3**
	+3	-15	
+1	-5	**0**	

De tal manera tenemos:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x^2 - 8x + 15) = (x + 2)(x - 3)(x - 5)$$

$\boldsymbol{x^3 - 6x^2 - x + 30 = (x + 2)(x - 3)(x - 5)}$ POLINOMIO FACTORIZADO

Ejemplo 6.17

Factorizar el polinomio $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

Solución.

Factores de 12

$$(+1)(+12) \qquad (+2)(+6) \qquad +(3)(+4)$$

$$(-\mathbf{1})(-12) \qquad (-2)(-6) \qquad (-3)(-4)$$

Tomamos el factor -1

+1	-2	-7	+8	+12	**-1**
	-1	+3	+4	-12	
+1	-3	-4	+12	**0**	

Nos queda:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x+1)(+1x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$$

Realizamos nuevamente la división sintética. Retomamos los factores de 12

$$(+1)(+12) \qquad +(2)(+6) \qquad (+3)(+4)$$

$$(-1)(-12) \qquad (-2)(-6) \qquad (-3)(-4)$$

Tomamos el factor -2

+1	-3	-4	+12	-2
	-2	+10	-12	
+1	-5	+6	0	

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x+1)(x+2)(+1x^2 - 5x + 6)$$

Encontramos los factores de 6 (1)(6), (-1)(-6), (2)(3), (-2)(-3). Tomamos el factor 2.

+1	-5	+6	+2
	+2	-6	
+1	-3	0	

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x+1)(x+2)(+1x^2 - 5x + 6) = (x+1)(x+2)(x-2)(x-3)$$

$\mathbf{x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x+1)(x+2)(x-2)(x-3)}$ **POLINOMIO FACTORIZADO**

Ejemplo 6.18

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24$$

Solución.

Factores de +24.

$$(+1)(+24) \qquad (+2)(+12) \qquad (+3)(+8) \qquad (+4)(+6)$$

$$(-1)(-24) \qquad (-2)(-12) \qquad (-3)(-8) \qquad (-4)(-6)$$

+1	0	-15	-10	+24	+1
	+1	+1	-14	-24	
+1	+1	-14	-24	0	

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x-1)(+1x^3 + 1x^2 - 14x - 24)$$

Factores de -24.

$$(+1)(-24) \qquad (+2)(-12) \qquad (+3)(-8) \qquad (+4)(-6)$$

$$(-1)(24) \qquad (-2)(12) \qquad (-3)(8) \qquad (-4)(6)$$

+1	+1	-14	-24	-2
	-2	+2	+24	
+1	-1	-12	0	

$$x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x-1)(x+2)(1x^2 - 1x - 12)$$

En este momento se puede emplear otro método de factorización o continuar con división sintética.

Continuando por el método de división sintética se encuentra los factores de -12.

$$(+1)(-12) \qquad (+2)(-6) \qquad (+3)(-4)$$

$$(-1)(+12) \qquad (-2)(+6) \qquad (-3)(+4)$$

+1	-1	-12	-3
	-3	+12	
+1	-4	0	

$\boldsymbol{x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = (x-1)(x+2)(x+3)(x-4)}$ **POLINOMIO FACTORIZADO**

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.7

Factorizar los siguientes polinomios.

1) $8x^4 - 18x^3 - 75x^2 + 46x + 120$

2) $a^5 - 21a^3 + 16a^2 + 108a - 144$

3) $y^5 - 30y^3 - 25y^2 - 36y - 180$

4) $2m^5 - 8m^4 + 3m - 12$

5) $z^6 - 32z^4 + 18z^3 + 247z^2 - 162z - 360$

6) $p^6 - 8p^5 + 6p^4 + 103p^3 - 344p^2 + 396p - 144$

Capítulo 7

FRACCIONES ÁLGEBRAICAS

7.1 Principio fundamental de las fracciones

Las fracciones álgebraicas representan números reales y, por lo tanto, se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. Una expresión fraccionaria es un cociente de expresiones álgebraicas.

Antes de definir las operaciones con fracciones álgebraicas recordemos algunos fundamentos de las fracciones.

Puesto que las fracciones álgebraicas representan números reales las propiedades que se aplican a las fracciones son las mismas y, además se incluyen algunas nuevas.

Para todos los números reales a, b, c y d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$;

1) Fracciones equivalentes.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{si y solo si } ad = bc$$

2) Principio fundamental de las fracciones.

$$\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b} \qquad \text{para toda } k \neq 0$$

3) Signo de las fracciones.

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b}$$

Se debe recordar que la división entre cero no está definida.

Hay tres tipos de signos que se asocian a una fracción. Son el signo que precede al numerador, el signo que precede al denominador y el signo que precede a la fracción. Si se cambian dos signos cualesquiera, la nueva fracción es equivalente.

7.2 Simplificación de fracciones álgebraicas

El principio fundamental se puede usar en dos formas. Una fracción se puede simplificar eliminando un factor común tanto del numerador como del denominador. A esto se le llama cancelar, simplificar, o reducir. Por otra parte, en muchas situaciones es preferible introducir un factor común, mediante la multiplicación, en el numerador y en el denominador.

Una fracción está en su mínima expresión, si el numerador y el denominador no tienen, a excepción del 1, factores comunes. El principio fundamental se puede emplear para reducir una fracción a su mínima expresión *eliminando los* ***factores*** *comunes*, ***no los términos comunes que se sumen***. Esto último lo podemos ver en el ejemplo 1.

Ejemplo 7.1

$\frac{a+b+c}{a+b+d} \neq \frac{c}{d}$ ***NO*** *se eliminan términos comunes* ***que se suman****.*

Pero:

$\frac{(a+b)c}{(a+b)d} = \frac{c}{d}$ *Los* ***factores*** *comunes se* ***eliminan****.*

Ejemplo 7.2

Simplifique las siguientes fracciones a su mínima expresión.

a) $\frac{a^2+ab}{a+b}$ b) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}$

c) $\frac{-3xy+6y^2}{x-2y}$ d) $\frac{3x^3-3xy^2}{x^2y-xy^2}$

Solución.

a) Se obtiene el factor común a y el factor $(a+b)$ se elimina.

$$\frac{a^2+ab}{a+b} = \frac{a(a+b)}{a+b} = \boldsymbol{a}$$

b) Se factoriza el numerador y denominador y se elimina el factor $(x+2)$.

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+1)} = \boldsymbol{\frac{x+3}{x+1}}$$

c) Se obtiene factor común $-3y$ y el factor $x-2y$ se elimina.

$$\frac{-3xy+6y^2}{x-2y} = \frac{-3y(x-2y)}{x-2y} = -3y$$

d) Se factoriza el numerador y denominador y se eliminan los factores x y $(x-y)$

$$\frac{3x^3-3xy^2}{x^2y-xy^2} = \frac{3x(x^2-y^2)}{xy(x-y)} = \frac{3x(x+y)(x-y)}{xy(x-y)} = \boldsymbol{\frac{3(x+y)}{y}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.1

Reduzca las fracciones dadas a su mínima expresión.

1) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+5x+6}$

2) $\dfrac{2h^2+3h-2}{3h^2+7h+2}$

3) $\dfrac{a^2+4a+3}{a^2-\mathrm{a}-2}$

4) $\dfrac{3w^2-8\mathrm{w}+4}{2w^2-w-6}$

5) $\dfrac{(x-y)(2x^2+xy-6y^2)}{(x+2y)(3x^2-xy-2y^2)}$

6) $\dfrac{(2a-b)(a^2-ab-6b^2)}{(a+2b)(2a^2+3ab-2b^2)}$

7) $\dfrac{5\mathrm{x}-3}{x(5x-3)+5x-3}$

8) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

9) $\dfrac{x+2}{(x+3)x+2}$

10) $\dfrac{(x^2-1)(y^3-y^2)x^2}{(xy-x^2)(x+1)(y-1)}$

7.3 Multiplicación de fracciones álgebraicas

Si a/b y c/d son dos fracciones en las que b y d son diferentes de cero, su producto es:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

El producto de dos o más fracciones dadas es una fracción cuyo numerador es igual al producto de los numeradores de las fracciones dadas, y cuyo denominador es igual al producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Ejemplo 7.3

Calcule el producto indicado. $\frac{3xy}{2a}\cdot\frac{6ab}{3xz}\cdot\frac{-5z^2}{10b^2x}$

Solución

Multiplicando en forma directa y cancelando se obtiene:

$$\frac{3xy}{2a}\cdot\frac{6ab}{3xz}\cdot\frac{-5z^2}{10b^2x}=\frac{-90xyabz^2}{60ax^2zb^2}=-\frac{3yz}{2xb}$$

Ejemplo 7.4

Calcule el producto indicado $\frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2+4a+3}\cdot\frac{a^2-9}{a^2-4a+4}$

Solución

Primero se factoriza:

$$\frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2+4a+3}\cdot\frac{a^2-9}{a^2-4a+4}=\frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{(a+2)(a-2)}{(a+1)(a+3)}\cdot\frac{(a+3)(a-3)}{(a-2)(a-2)}$$

Y luego se eliminan términos semejantes.

$$\frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2+4a+3}\cdot\frac{a^2-9}{a^2-4a+4}=\frac{\cancel{a+1}}{\cancel{a+2}}\cdot\frac{(\cancel{a+2})(\cancel{a-2})}{(\cancel{a+1})(\cancel{a+3})}\cdot\frac{(\cancel{a+3})(a-3)}{(\cancel{a-2})(a-2)}$$

$$\frac{a+1}{a+2}\cdot\frac{a^2-4}{a^2+4a+3}\cdot\frac{a^2-9}{a^2-4a+4}=\boldsymbol{\frac{a-3}{a-2}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.2

Realizar las operaciones indicadas y simplificar.

1) $\frac{7a}{6m^2}\times\frac{3m}{10n^2}\times\frac{5n^4}{14ax}$

2) $\frac{2x^2+x}{6}\times\frac{8}{4x+2}$

3) $\frac{5x+25}{14}\times\frac{7x+7}{10x+50}$

4) $\frac{m+n}{mn-n^2}\times\frac{n^2}{m^2-n^2}$

5) $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-2xy}$

6) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+2xy}\times\frac{x^2}{x^2-4y^2}$

7) $\frac{2x^2+2x}{2x^2}\times\frac{x^2-3x}{x^2-2x-3}$

8) $\frac{a^2-ab+a-b}{a^2+2a+1}\times\frac{3}{6a^2-6ab}$

9) $\frac{(x-y)^3}{x^3-1}\times\frac{x^2+x+1}{(x-y)^2}$

10) $\frac{2a-2}{2a^2-50}\times\frac{a^2-4a-5}{3a+3}$

7.4 División de fracciones álgebraicas

Para dividir a/b entre c/d se tiene:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Multiplicando el numerador y denominador por el mismo factor (multiplicar por uno). El factor que utilizaremos es el reciproco del denominador el cual es $\frac{d}{c}$.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}}$$

Al realizar la multiplicación nos queda:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1}$$

Simplificando se tiene:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\boldsymbol{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}}$$

Por lo que, para hallar el cociente de dos fracciones, se multiplica el numerador por el recíproco del denominador.

Ejemplo 7.5

Calcule el cociente indicado $\frac{2ab}{3x} \div \frac{2a}{3xy}$

Solución

Sabiendo que $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$; por lo que la división se puede escribir:

$$\frac{2ab}{3x} \div \frac{2a}{3xy} = \frac{2ab}{3x} \cdot \frac{3xy}{2a}$$

Multiplicando directamente y simplificando.

$$\frac{2ab}{3x} \div \frac{2a}{3xy} = \frac{2ab}{3x} \cdot \frac{3xy}{2a} = \frac{6abxy}{6ax} = \boldsymbol{by}$$

Ejemplo 7.6

Calcule el cociente indicado $\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6}$

Solución

Sabiendo que $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$; por lo que la división se puede escribir:

$$\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6} = \frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \cdot \frac{a^2-5a+6}{a^2+2a}$$

Se factoriza.

$$\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6} = \frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \cdot \frac{a^2-5a+6}{a^2+2a} = \frac{a \cdot a \cdot (a+3)}{(a+3)(a-3)} \cdot \frac{(a-3)(a-2)}{a(a+2)}$$

Simplificando.

$$\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6} = \frac{\cancel{a} \cdot a \cdot \cancel{(a+3)}}{\cancel{(a+3)}\cancel{(a-3)}} \cdot \frac{\cancel{(a-3)}(a-2)}{\cancel{a}(a+2)}$$

$$\frac{a^3+3a^2}{a^2-9} \div \frac{a^2+2a}{a^2-5a+6} = \frac{a \cdot (a-2)}{(a+2)}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.3

Realizar las operaciones indicadas y simplificar.

1) $\frac{17a^2b^3}{26x^2} \div \frac{51a^3b}{13x^4}$

2) $\frac{14x^2y}{9a^3} \div \frac{35y^3}{18a^3}$

3) $\frac{6a^2b^3}{8x^2y^6} \div \frac{15a^4b}{12xy^3}$

4) $\frac{28a^4b^9}{22x^3y^5} \div \frac{35a^6b^9}{55xy^5}$

5) $\frac{4a^2b^4}{9x^4y^2} \div \frac{8a^4b^9}{27x^3y^6}$

6) $\frac{3a^2b-ab^2}{x^2} \div \frac{6a^2-2ab}{x^4}$

7) $\frac{x}{14a^3+21a^2b} \div \frac{x^3}{6a^2+9ab}$

8) $\frac{4x^3}{3x^2-3xy} \div \frac{x^2}{x^2-y^2}$

9) $\frac{64x^6}{16x^2-16y^2} \div \frac{4x^5}{3xy+3y^2}$

10) $\frac{x^3+x}{x^2-x} \div \frac{x^3-x^2}{x^2-2x+1}$

7.5 Adición y sustracción de fracciones álgebraicas

Al sumar o restar dos fracciones que tienen el mismo denominador, simplemente se reescribe el denominador y se suman o restan los numeradores, según el caso.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m} \qquad \text{SUMA}$$

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m} \qquad \text{RESTA}$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a+b-c+d}{m} \qquad \text{SUMAS Y RESTAS}$$

Si los denominadores de las fracciones que se van a sumar no son iguales, primero se cambian las fracciones originales por fracciones equivalentes con el mismo denominador, y luego se suman como se acaba de indicar en el caso anterior.

Mínimo común múltiplo expresiones álgebraicas.

El mínimo común múltiplo MCM (también conocido como mínimo común denominador) de dos o más expresiones álgebraicas, es la expresión álgebraica de menor coeficiente numérico y de menor grado, que es divisible exactamente por cada una de las expresiones álgebraicas dadas.

Para determinar el MCM:

1. *Factorizar* cada uno de los denominadores en factores primos.
2. Se escribe el producto de los *distintos factores primos* de los denominadores.
3. Se da a cada factor primo *un exponente igual al **máximo exponente** de ese factor* primo en cualquiera de los denominadores dados.

Ejemplo 7.7

Halle el mínimo común múltiplo de las fracciones.

$$\frac{2x}{(x-2)^4(x+1)} \qquad \frac{3x^2+1}{(x-2)(x+1)^3(x-1)} \qquad \text{y} \qquad \frac{177}{(x-2)^2(x-1)^2}$$

Solución

Los denominadores se encuentran factorizados y los factores primos que tenemos en estas tres fracciones son:

$$(x-2) \qquad (x+1) \qquad (x-1)$$

El ***máximo*** exponente para el factor $(x-2)$ es 4.

El ***máximo*** exponente para el factor $(x+1)$ es 3.

El ***máximo*** exponente para el factor $(x-1)$ es 2.

Debemos tomar cada uno de los factores con su máximo exponente, por lo que el MCM es:

$$\boldsymbol{(x-2)^4(x+1)^3(x-1)^2}$$

Ejemplo 7.8

Convierta el grupo de fracciones *en fracciones equivalentes con un denominador común*.

$$\frac{2x}{(x-2y)(x+y)} \qquad \frac{-8y}{(3x-y)(x+y)} \qquad \text{y} \qquad \frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}$$

Solución

Los denominadores se encuentran factorizados y los factores primos que tenemos en estas tres fracciones son:

$$(x-2y) \qquad (x+y) \qquad (3x-y)$$

Cada uno de los factores tiene como máximo exponente 1, por lo que el MCD de estas tres fracciones es:

$$\boldsymbol{(x-2y)(x+y)(3x-y)} \qquad \textbf{MCM de las fracciones}$$

Ahora determinamos las fracciones con un denominador común.

Para la ***primera fracción*** $\frac{2x}{(x-2y)(x+y)}$ dividimos el MCM obtenido entre el denominador de la fracción.

$$\frac{(x-2y)(x+y)(3x-y)}{(x-2y)(x+y)} = 3x-y$$

Multiplicamos el numerador y denominador de la fracción por lo obtenido de la división.

$$\boldsymbol{\frac{2x}{(x-2y)(x+y)} \cdot \frac{3x-y}{3x-y} = \frac{6x^2-2xy}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}}$$

Para la ***segunda fracción*** $\frac{-8y}{(3x-y)(x+y)}$ dividimos el MCM obtenido entre el denominador de la fracción.

$$\frac{(x-2y)(x+y)(3x-y)}{(3x-y)(x+y)} = x-2y$$

Multiplicamos el numerador y denominador de la fracción por lo obtenido de la división.

$$\frac{-8y}{(3x-y)(x+y)}\cdot\frac{x-2y}{x-2y}=\frac{16y^2-8xy}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}$$

Para la ***tercera fracción*** $\frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}$ dividimos el MCM obtenido entre el denominador de la fracción.

$$\frac{(x-2y)(x+y)(3x-y)}{(x-2y)(3x-y)}=x+y$$

Multiplicamos el numerador y denominador de la fracción por lo obtenido de la división.

$$\frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}\cdot\frac{x+y}{x+y}=\frac{x^2-y^2}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}$$

Ahora tenemos las tres fracciones equivalentes con denominador común.

Ejemplo 7.9

Efectuar la operación indicada y simplificar.

$$\frac{4}{3x}+\frac{5}{x}-\frac{3}{5x^2}$$

Solución

Se observa que las fracciones tienen diferentes denominadores, por lo que debe determinarse el MCM entre ellos.

El MCM de 3, 1 y 5 es 15. El MCM de x, x y x^2 es x^2.

Por lo que el MCM de $3x$, x y $5x^2$ es $15x^2$.

Escribiendo cada fracción con el nuevo denominador común, se tiene:

$$\frac{15x^2}{3x}=5x \qquad \frac{4}{3x}\cdot\frac{5x}{5x}=\frac{20x}{15x^2}$$

$$\frac{15x^2}{x}=15x \qquad \frac{5}{x}\cdot\frac{15x}{15x}=\frac{75x}{15x^2}$$

$$\frac{15x^2}{5x^2}=3 \qquad -\frac{3}{5x^2}\cdot\frac{3}{3}=-\frac{9}{15x^2}$$

De tal forma que ahora tenemos suma de fracciones con iguales denominadores.

$$\frac{4}{3x}+\frac{5}{x}-\frac{3}{5x^2}=\frac{20x}{15x^2}+\frac{75x}{15x^2}-\frac{9}{15x^2}=\frac{20x+75x-9}{15x^2}$$

$$\boldsymbol{\frac{4}{3x}+\frac{5}{x}-\frac{3}{5x^2}=\frac{95x-9}{15x^2}}$$

Ejemplo 7.10

Efectuar la operación indicada y simplificar.

Solución

En el ejemplo 8 se obtuvieron las fracciones equivalentes, por lo que solamente se escribirá la suma y resta indicadas en el numerador debido a que el denominador es el mismo para todas las fracciones.

$$\frac{2x}{(x-2y)(x+y)}+\frac{-8y}{(3x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}=\frac{6x^2-2xy}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}+\frac{16y^2-8xy}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}-\frac{x^2-y^2}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}$$

$$\frac{2x}{(x-2y)(x+y)}+\frac{-8y}{(3x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}=\frac{6x^2-2xy+16y^2-8xy-x^2+y^2}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}$$

$$\boldsymbol{\frac{2x}{(x-2y)(x+y)}+\frac{-8y}{(3x-y)(x+y)}-\frac{x-y}{(x-2y)(3x-y)}=\frac{5x^2-10xy+17y^2}{(x-2y)(x+y)(3x-y)}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.4

Realizar las operaciones indicadas y simplificar.

1) $\frac{x}{x-5}-\frac{5}{x-5}$

2) $\frac{2x-1}{3x-2}+\frac{1-2x}{3x-2}$

3) $\frac{2x+1}{3x-7}-\frac{x+8}{3x-7}$

4) $\frac{x-1}{3x^2}+\frac{x+1}{3x^2}$

5) $\frac{x+2}{6x^3}+\frac{3x-2}{6x^3}$

6) $\frac{2x^2+1}{4x^2}-\frac{2x^2-1}{4x^2}$

7) $\frac{x^3-3}{2x^4}-\frac{7x^3-3}{2x^4}$

8) $\frac{2x}{x-1}-\frac{2}{x-1}$

9) $\frac{x^2}{x^2+x}-\frac{x}{x^2+x}$

10) $\frac{4x^2+3x}{5x+2}+\frac{x^2-x}{5x+2}$

11) $\frac{2x+3}{3x-6}-\frac{3-x}{3x-6}$

12) $\frac{x^2-3}{x^2-8x+12}+\frac{2x-1}{x^2-8x+12}-\frac{x+2}{x^2-8x+12}$

13) $\frac{x^2+4x}{4x^4-13x^2+3}+\frac{x^2-2x}{4x^4-13x^2+3}-\frac{3x}{4x^4-13x^2+3}$

14) $\frac{5}{t-1}+\frac{3}{t}$

15) $\frac{6}{9-a^2}-\frac{3}{12+4a}$

16) $\frac{3}{2a+18}+\frac{27}{a^2-81}$

17) $\frac{4x}{x^2-4}-\frac{2}{x^2+x-6}$

18) $\frac{x+4}{x^2-x-2}-\frac{2x+3}{x^2+2x-8}$

19) $\frac{2x-3}{x^2+8x+7}-\frac{x-2}{(x+1)^2}$

20) $\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}\right)$

7.6 Fracciones complejas

Una fracción compleja es una fracción en la que al menos uno de los términos de uno o ambos miembros es una fracción. Las siguientes expresiones racionales son fracciones complejas:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} \qquad \frac{\frac{5x-5}{7x+2}}{4x+3} \qquad \frac{\frac{(x+2)(x-4)}{x^3-5}}{\frac{4-x}{x-7}} \qquad \frac{3-\frac{y+z}{y-z}}{4-\frac{3x^2-7xy+4y^2}{2x-4y}}$$

La transformación de una fracción compleja a una fracción más simple se puede hacer mediante dos métodos:

Método 1.- Consiste en calcular el MCM de todas las fracciones de la fracción compleja y luego multiplicar el numerador y el denominador de la fracción compleja por ese MCM.

Método 2.- Consiste en efectuar las operaciones indicadas en el numerador y denominador de la fracción compleja y luego, dividir el resultado que se obtenga en el numerador entre el resultado que se obtenga en el denominador.

Ejemplo 7.11

Simplificar la fracción compleja.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}$$

Solución

Empleando el ***primer método***, se tiene que el MCM es 15b, luego se multiplica numerador y denominador por ese MCM.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{30b+\frac{45ab}{5b}}{15ab+\frac{150b^2}{3}}$$

Simplificando.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{30b+9a}{15ab+50b^2}$$

Factorizando.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3(10b+3a)}{5b(3a+10b)}$$

Eliminando factores comunes para simplificar.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3\cancel{(10b+3a)}}{5b\cancel{(3a+10b)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3}{5b}}$$

Empleando el segundo método, se efectúan las operaciones indicadas en numerador y denominador. En seguida se hace la división del numerador entre el denominador.

Hacemos la suma del numerador y denominador.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}=\frac{\frac{10b+3a}{5b}}{\frac{3a+10b}{3}}$$

Se realiza la división.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}=\frac{10b+3a}{5b}\div\frac{3a+10b}{3}=\frac{10b+3a}{5b}\cdot\frac{3}{3a+10b}$$

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}=\frac{30b+9a}{15ab+50b}$$

Factorizando.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3(10b+3a)}{5b(3a+10b)}$$

Eliminando factores comunes para simplificar.

$$\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3(\cancel{10b+3a})}{5b(\cancel{3a+10b})}$$

$$\boldsymbol{\frac{2+\frac{3a}{5b}}{a+\frac{10b}{3}}\cdot\frac{15b}{15b}=\frac{3}{5b}}$$

Ejemplo 7.12

Simplificar la fracción compleja.

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}$$

Las fracciones de esta forma se le llaman ***fracciones continuas***. Para simplificar este tipo de fracciones se debe ***realizar las operaciones indicadas, comenzado <u>de abajo hacia arriba</u>***.

Solución

Simplificando la expresión $x-\frac{x-2}{x+1}$, debido que es la expresión que se encuentra abajo.

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{\boldsymbol{x-\frac{x-2}{x+1}}}}=\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{\frac{\boldsymbol{x^2+x-x+2}}{\boldsymbol{x+1}}}}$$

Simplificando la expresión obtenida.

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\frac{\boldsymbol{x^2+2}}{\frac{\boldsymbol{x^2+2}}{\boldsymbol{x+1}}}}$$

Realizando la operación $\frac{\boldsymbol{x^2+2}}{\frac{\boldsymbol{x^2+2}}{\boldsymbol{x+1}}}$ se tiene:

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-\frac{\boldsymbol{(x+1)(x^2+2)}}{\boldsymbol{x^2+2}}}$$

Simplificando la expresión $\frac{(x+1)(x^2+2)}{x^2+2}$

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{x+2-(\boldsymbol{x+1})}=\frac{x-1}{x+2-\boldsymbol{x-1}}$$

Realizando las operaciones en el denominador.

$$\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=\frac{x-1}{1}$$

Finalmente tenemos que:

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{x+2-\frac{x^2+2}{x-\frac{x-2}{x+1}}}=x-1}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.5

Simplificar las siguientes expresiones.

1) $$\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}}$$

2) $$\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}}{\frac{x-2}{x}+\frac{2x+6}{x+1}}$$

3) $$\frac{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a}{b}}$$

4) $$\frac{\frac{x+3}{x+4}-\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x-1}{x+2}-\frac{x-3}{x+4}}$$

5) $$\frac{\frac{m^2}{n}-\frac{m^2-n^2}{m+n}}{\frac{m-n}{n}+\frac{n}{m}}$$

6) $$\frac{\frac{1}{x+y+z}-\frac{1}{x-y+z}}{\frac{1}{x-y+z}-\frac{1}{x+y+z}}$$

7) $$\frac{1+\frac{2b+c}{a-b-c}}{1-\frac{c-2b}{a-b+c}}$$

8) $$\frac{\frac{a}{1-a}+\frac{1-a}{a}}{\frac{1-a}{a}-\frac{a}{1-a}}$$

9) $$\frac{\frac{x+1-\frac{6x+12}{x+2}}{x-5}}{\frac{x-4+\frac{11x-22}{x-2}}{x+7}}$$

10) $$\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

Capítulo 8

EXPONENTES Y RADICALES

8.1 Notación y leyes de los exponentes

Los exponentes y los radicales proporcionan una notación conveniente que permite tratar con problemas en los que interviene lo muy grande, tal como el tamaño de las galaxias, y lo muy pequeño, tal como la distancia entre las células.

Si a es un número real y n es un entero positivo, entonces a^n representa al producto de n factores cada uno de los cuales es a. Esto es:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\ veces}$$

La cantidad a^n se llama la *enésima* potencia de a o bien a a la n. El número a se denomina la base y n el exponente de la base.

Exponente de la base

a^n Enésima potencia de a

Base

La primera potencia de un número se expresa sin escribir un exponente (por ejemplo, $a^1 = a$). Se debe tomar en cuenta que $a^n \neq 0$ a menos que $a = 0$.

Las siguientes cinco leyes de los exponentes son válidas para exponentes ***enteros positivos***.

Si a es un número real; si m y n son enteros positivos, entonces:

Ley 1. $$a^m a^n = a^{m+n}$$

Ley 2. $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & si \quad m > n \\ 1 & si \quad m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & si \quad m < n \end{cases}$$

Ley 3. $$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ley 4. $(ab)^m = a^m b^m$

Ley 5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}\ si\ b \neq 0$

Para ***exponentes negativos y nulos*** se tienen las siguientes definiciones:

- ✓ Si a es un número no nulo, entonces $a^0 = 1$
- ✓ Si n es un número entero positivo y $a \neq 0$, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- ✓ Si a y b son números tales que la enésima potencia de b (n entero positivo) es igual a a. Entonces b se conoce como la enésima raíz de a.
- ✓ Cuando n es un entero par, la enésima raíz de un número a se llama la enésima raíz principal de a. Cuando n es impar, la enésima raíz real de un número positivo o negativo a se conoce como la enésima raíz principal.
- ✓ Si m/n es un número racional, donde m y n son enteros positivos, entonces:
  - ➢ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$ si n es par.
  - ➢ $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, si $a \neq 0$.

Simplificación de fracciones con exponentes de diversos tipos

Ejemplo 8.1

Simplifique cada expresión al efectuar las operaciones indicadas y dejando el resultado sin exponentes negativos o nulos.

1) $\frac{(5x^2y^2)^3}{(10xy^4)^2}$

3) $\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-2}}$

2) $\left(x^{1/2} - 1\right)\left(x^{1/2} + 1\right)$

4) $\left(\frac{x^{1/2}y^{-3/5}}{x^0y^{-2/5}}\right)^{-5}$

Solución

Para resolver el ejercicio 1 se eleva cada factor del numerador al exponente 3 y cada factor del denominador al exponente 2 y se simplifica la fracción.

$$\frac{(5x^2y^2)^3}{(10xy^4)^2} = \frac{125x^6y^6}{100x^2y^8} = \boldsymbol{\frac{5x^4}{4y^2}}$$

Para resolver el ejercicio 2 se aplica $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para cada término del numerador y denominador. Se simplifica la fracción compleja resultante.

$$\frac{x^{-2}+y^{-2}}{(xy)^{-2}} = \frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{(xy)^2}} = \frac{\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}}{\frac{1}{x^2y^2}} = \boldsymbol{x^2+y^2}$$

Para resolver el ejercicio 3 se multiplican los binomios conjugados

$$\left(x^{1/2}-1\right)\left(x^{1/2}+1\right) = \left(\left(x^{1/2}\right)^2 - 1^2\right) = \boldsymbol{x-1}$$

Para el ejercicio 4 tenemos.

$$\left(\frac{x^{1/2}y^{-3/5}}{x^0y^{-2/5}}\right)^{-5} = \left(\frac{x^0y^{-2/5}}{x^{1/2}y^{-3/5}}\right)^5 = \frac{x^{0\cdot 5}y^{(-2/5)\cdot 5}}{x^{(1/2)\cdot 5}y^{(-3/5)\cdot 5}} = \frac{x^0\cdot y^{-2}}{x^{5/2}y^{-3}} = \frac{y^{-2+3}}{x^{5/2}} = \boldsymbol{\frac{y}{x^{5/2}}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 8.1

Efectué las operaciones indicadas y simplifiqué el resultado en los siguientes ejercicios.

1) $3^2 3^4$

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

3) $(2^2 2^3)^3$

4) $\frac{12x^4y^5}{3x^2y^2}$

5) $(2a^3b^2)^3$

6) $\left(\frac{a^3b^2}{c^3}\right)^2\left(\frac{a^2c^4}{b}\right)^3$

7) $\frac{(a^{2n-1}b^{n+3})^2}{a^{n-2}b^{n+1}}$

8) $\frac{3^{-1}}{3^{-3}}$

9) $2^{-4}2^{3}$

10) $\dfrac{a^{-1}b^{-2}}{a^{2}b^{2}c^{3}}$

11) $\dfrac{18x^{1/3}y^{-1/2}}{6x^{-1/3}y^{1/2}}$

12) $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{3}}\right)^{-3}$

13) $0.64^{1/2}$

14) $\sqrt[4]{81}$

15) $\sqrt{\dfrac{8a^{3}}{b^{6}}}$

16) $\left(3x^{1/4}\right)\left(2x^{1/3}\right)$

17) $(25x^{2}y^{4})^{1/2}$

18) $(8x^{3}y^{6})^{1/3}(9x^{2}y^{6})^{-1/2}$

19) $\sqrt{27}$

20) $\sqrt[3]{40}$

21) $\sqrt{8}\sqrt{2}$

22) $\sqrt[5]{a^{5}}\sqrt[5]{a^{4}}$

23) $\sqrt{15x^{2}y}\sqrt{6x^{4}y^{3}}$

24) $\dfrac{a^{-1}b^{-3}-a^{-3}b^{-1}}{b^{-3}-a^{-3}}$

8.2 Leyes de los Radicales

Hay cuatro leyes de los radicales que son consecuencia inmediata de las correspondientes leyes de los exponentes, dadas también para cada caso.

Restringiremos a m y n a ser enteros positivos y a a y b a ser no negativos siempre que m o n sea par (para evitar la raíz de números negativos).

Ley 1. $\sqrt[n]{a^{n}} = (\sqrt[n]{a}\,)^{n} = a$ $\qquad (a^{n})^{1/n} = (a^{1/n})^{n} = a$

Ley 2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $\qquad (ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$

Ley 3. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$ si b ≠ 0

Ley 4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$ $\qquad (a^{1/m})^{1/n} = a^{(1/m)(1/n)} = a^{1/mn}$

Estas leyes se pueden emplear para hacer cambios en los radicales, siendo las más comunes las siguientes:

a. Remover factores del radicando.
b. Convertir el radicando en no fraccionario.
c. Expresar un radical como un radical de orden más bajo.
d. Incluir un factor dentro del signo radical.

Se dice que un radical está en su forma más simple cuando las operaciones 1, 2 y 3 se han llevado a cabo. La operación 2 se llama racionalización del denominador.

Observe que si $a \geq 0$, entonces $\sqrt{a^2} = a$. Sin embargo, si $a < 0$, entonces $\sqrt{a^2} = -a$.

Por ejemplo:

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -(-3)$$

Lo anterior se puede resumir de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{\sqrt{a^2} = |a|}$$

Ejemplo 8.2

Simplifique el radical dado:

1. $\sqrt{81\,a^4b^2}$
2. $\sqrt[4]{81m^4n^{12}}$
3. $\sqrt[6]{\frac{64a^6}{b^{12}}} + a$
4. $\sqrt{\frac{a^2+2a+1}{a^2-2a+1}}$

Solución

Ejercicio uno:

$$\sqrt{81\,a^2b^2} = (81a^4b^2)^{1/2} = (81)^{1/2} \cdot (a^4)^{1/2} \cdot (b^2)^{1/2} = \boldsymbol{9a^2b}$$

Ejercicio dos:

$$\sqrt[4]{81m^4n^{12}} = (81m^4\,n^{12})^{1/4} = (3^4)^{1/4} \cdot (m^4)^{1/4}(n^{12})^{1/4} = 3mn^3$$

Ejercicio tres:

$$\sqrt[6]{\frac{64a^6}{b^{12}}}\ +a=\left(\frac{64a^6}{b^{12}}\right)^{1/6}+a=\frac{\left(2^6a^6\right)^{1/6}}{\left(b^{12}\right)^{1/6}}+a=\frac{2a}{b^2}+a=\frac{2a+ab^2}{b^2}=\boldsymbol{\frac{a(2+b^2)}{b^2}}$$

Ejercicio cuatro:

$$\sqrt{\frac{a^2+\ 2a+\ 1}{a^2-2a+1}}=\left(\frac{a^2+\ 2a+\ 1}{a^2-2a+1}\right)^{1/2}=\left[\frac{(a+1)^2}{(a-1)^2}\right]^{1/2}=\frac{(a+1)^{2/2}}{(a-1)^{2/2}}=\boldsymbol{\frac{(a+1)}{(a-1)}}$$

Ejemplo 8.3

Incluya el coeficiente con la potencia apropiada dentro del signo radical de $2x\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}$

Solución.

Elevamos al cuadro la expresión 2x y también le sacamos raíz cuadrado por lo que "**no** lo estamos haciendo nada".

$$2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}=\sqrt{(2x)^2}\cdot\sqrt{\frac{4x^2-1}{4x^2}}$$

Aplicamos la ley dos $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$$2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}=\sqrt{\frac{\cancel{4x^2}\,(4x^2-1)}{\cancel{4x^2}}}$$

Simplificando resultado, eliminando factores comunes.

$$2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}=\boldsymbol{\sqrt{4x^2-1}}$$

Ejemplo 8.4

Racionalice el numerador y simplifique la expresión $\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}$

Solución.

Multiplicamos por el conjugado del numerador y dividimos por el mismo ("multiplicamos por uno"). Aplicamos productos notables producto de binomios conjugados (sección2.4)

$$\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{(\sqrt{x+h+3})^2-(\sqrt{x+3})^2}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

Realizando las operaciones indicadas en el numerador.

$$\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{x+h+3-x-3}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

Sumando términos semejantes.

$$\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

Eliminando factores.

$$\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{x+h+3}-\sqrt{x+3}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x+h+3}+\sqrt{x+3}}}$$

La técnica utilizada en el ejemplo 5.4 es muy utilizada en cálculo diferencial e integral. Se recomienda ampliamente dominar esta técnica.

8.3. Adición y sustracción de radicales

Los radicales que tienen el mismo orden y el mismo radicando se llaman radicales semejantes. Una suma álgebraica de radicales semejantes se puede expresar como un radical sencillo mediante el uso de la ley distributiva.

Se pueden convertir radicales no semejantes a radicales semejantes cuando se simplifican. Los radicales que no es posible expresar como radicales semejantes se pueden sumar y restar indicando los signos apropiados, aunque estos resultados no se expresarán mediante un solo radical.

Ejemplo 8.5

Simplifique la expresión $\sqrt[3]{2a^4} + 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a}$

Solución.

Expresando como potencias 3.

$$\sqrt[3]{2a^4} + 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a} = \sqrt[3]{2a \cdot a^3} + 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2a} - \sqrt{2a}$$

Sacando los términos con potencia de 3 de la raíz.

$$\sqrt[3]{2a^4} + 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a} = a \cdot \sqrt[3]{2a} + 3 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt{2a}$$

$$\sqrt[3]{2a^4} + 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a} = a \cdot \sqrt[3]{2a} + 6 \cdot \sqrt[3]{2a} - \sqrt{2a}$$

Factorizando.

$$\sqrt[3]{2a^4} + 3\sqrt[3]{16a} - \sqrt{2a} = \boldsymbol{(a+6)\sqrt[3]{2a} - \sqrt{2a}}$$

Ejemplo 8.6

Simplifique la expresión radical $\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2}$

Solución.

Los radicales no son idénticos, sin embargo, algunos de ellos se pueden convertir en otro equivalente.

$$\sqrt{8a^3b^3} = \sqrt{(2ab)^2 2ab} = 2ab\sqrt{2ab}$$

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt[3]{8a^4b^4} = \sqrt[3]{(2ab)^3ab} = 2ab\sqrt[3]{ab}$$

$$\sqrt[4]{4a^2b^2} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{(2ab)^2}} = \sqrt{2ab}$$

Reescribiendo la expresión, se obtiene:

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2} = 2ab\sqrt{2ab} + \sqrt[3]{ab} - 2ab\sqrt[3]{ab} - \sqrt{2ab}$$

Agrupando términos:

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2} = \left(2ab\sqrt{2ab} - \sqrt{2ab}\right) + \left(\sqrt[3]{ab} - 2ab\sqrt[3]{ab}\right)$$

Reescribiendo la expresión:

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2} = \sqrt{2ab}\cdot(2ab-1) + \sqrt[3]{ab}\cdot(1-2ab)$$

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2} = \sqrt{2ab}\cdot(2ab-1) - \sqrt[3]{ab}\cdot(2ab-1)$$

Factorizando:

$$\sqrt{8a^3b^3} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{8a^4b^4} - \sqrt[4]{4a^2b^2} = \boldsymbol{(2ab-1)\left(\sqrt{2ab} - \sqrt[3]{ab}\right)}$$

8.4. Multiplicación y división de radicales

Se pueden multiplicar dos radicales del mismo orden mediante la aplicación de la ley 2 de la sección 5.2. Para multiplicar dos radicales de órdenes diferentes, primero es necesario expresarlos como radicales del mismo orden. El orden de los nuevos radicales debe ser el Máximo Común Múltiplo de los órdenes de los radicales originales. En esta parte derivamos una ley para elevar el orden de un radical.

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = a^{1/n \cdot c/c} = \sqrt[cn]{a^c}$$

Donde n es el orden del radical y c es un entero positivo mayor que 1. Considerando que $a \geq 0$ cuando c es par.

En consecuencia, tenemos una ley más de los radicales.

Ley 5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[cn]{a^c}$ si $a \geq$ 0 cuando c es par $a^{c/cn}$

Ejemplo 8.7

Realice las operaciones indicas y simplifique los resultados.

a) $\sqrt{18x^2y} \cdot \sqrt{2xy^3}$ b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x}$ c) $\sqrt[3]{15x^4} \div \sqrt[3]{4x}$

Solución.

Para resolver el ejemplo 5.7 – a; el orden de ambos radicales es igual, por lo que:

$$\sqrt{18x^2y} \cdot \sqrt{2xy^3} = \sqrt{(18x^2y)(2xy^3)} = \sqrt{36x^3y^4} = \boldsymbol{6xy^2\sqrt{x}}$$

Para resolver el ejemplo 5.7 – b; el orden de los radicales es distinto, por lo que se tiene que encontrar el MCM de los tres; el orden correspondiente a cada radical es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, por lo que el MCM es: $\frac{1}{12}$

Reescribiendo radicales:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{x^4} \cdot \sqrt[12]{x^3}$$

Simplificando tenemos:

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^6 \cdot x^4 \cdot x^3}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^{12} \cdot x}$$

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x} = \boldsymbol{x \cdot \sqrt[12]{x}}$$

Para resolver el ejemplo 5.7 – b, Reescribiendo la expresión y aplicando la ley 2 de los exponentes.

$$\sqrt[3]{15x^4} \div \sqrt[3]{4x} = \frac{(15x^4)^{1/3}}{(4x)^{1/3}} = \left(\frac{15x^4}{4x}\right)^{1/3} = \left(\frac{15}{4}x^3\right)^{1/3}$$

$$\sqrt[3]{15x^4} \div \sqrt[3]{4x} = \boldsymbol{x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^{1/3}}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 8.2

Simplifique la operación indicada a su mínima expresión.

1) $\sqrt{\sqrt[3]{x^8}}$

2) $\sqrt[3]{-15} \cdot \sqrt[3]{-18}$

3) $\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{9x}$

4) $\sqrt[3]{4xy^2} \cdot \sqrt[3]{-10y}$

5) $\sqrt[4]{6a^2} \cdot \sqrt[4]{8a^3}$

6) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$

7) $\sqrt{3a} \cdot \sqrt[3]{9a^2}$

8) $\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

9) $\sqrt{7}(2\sqrt{7} + \sqrt{3})$

10) $\sqrt{14}(3\sqrt{6} + 2\sqrt{21})$

11) $\sqrt{x}(2\sqrt{x} - \sqrt{y})$

12) $\sqrt{10xy}(\sqrt{5x} - \sqrt{2y})$

13) $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$

14) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$

15) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

16) $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$

17) $(\sqrt{5} + 2\sqrt{7})(3\sqrt{5} + \sqrt{7})$

18) $(3 - 2\sqrt{2})^2$

19) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^2$

20) $(2 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x})$

21) $(\sqrt{3} - 2x)(2\sqrt{3} + x)$

22) $(x + \sqrt{y})(x - \sqrt{y})$

23) $(3x + \sqrt{2y})(3x - \sqrt{2y})$

24) $(\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})$

25) $(x - \sqrt{3})^2$

26) $(\sqrt{2x} + \sqrt{3y})^2$

27) $(\sqrt{x+2} + 4)^2$

28) $(\sqrt{x-3} - 2)^2$

29) $(\sqrt{x+9} - 3)^2$

30) $(3 - \sqrt{x+1})^2$

R E S P U E S T A S

CAPÍTULO 1.- ARITMÉTICA BÁSICA

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 1.1

a)

1) 15	2) 24	3) 7	4) -1
5) 0	6) 2	7) 3	8) -10
9) -27	10) -2	11) 10	12) 4
13) -9	14) 5	15) 12	16) 17

b)

1) 105, 243, 2 457	2) 800, 112, 324, 13 564	3) 105, 8 910, 34 615
4) 78, 768, 1 470	5) 175, 1 645, 3 528	6) 3 128, 5 024, 9 000
7) 225, 1 008, 2 925	8) 66, 253, 935	9) 195, 1 105
10) 1 007, 380, 1 596		

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 1.2

a)

1) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$	2) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3$	3) $3\cdot3\cdot5\cdot5$
4) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3$	5) $3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$	6) $2\cdot3\cdot5\cdot7$
7) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot7$	8) $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$	9) $3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$
10) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot11$	11) $2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot13$	12) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7$
13) $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7$	14) $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$	15) $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$

b)

1) MCD = 36	2) MCD = 90	3) MCD = 1	4) MCD = 6	5) MCD = 1
6) MCD = 5	7) MCD = 12	8) MCD = 14	9) MCD = 77	10) MCD = 143

c)

1) mcm = 216	2) mcm = 90	3) mcm = 432	4) mcm = 180	5) mcm = 540
6) mcm = 1260	7) mcm = 300	8) mcm = 10 800	9) mcm = 7 700	10) mcm = 148 225

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 1.3

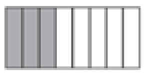
1. Cada bolsa pesa 6 kg y hay 2 de res, 3 de cerdo, y 4 de pollo por caja.
2. Después de 30 segundos.
3. 20 cm por lado.
4. Después de 12 minutos y dieron 2 y 3 vueltas.
5. 24 litros.
6. 6 metros.
7. 3 metros, 10 troncos.
8. $1,000 a cada nieto y tiene 14 nietos.
9. 252 minutos y a las 3:12 horas volverán a coincidir.
10. Se pueden hacer 13 costalitos con 15 canicas.
11. Cada caja contiene 150 lapiceros.
12. De color lila 3 cubos y de color rojo 4.
13. 90 minutos, y dan 9, 6 y 5 vueltas, respectivamente.
14. 2006.
15. 25 cm y son 187 mosaicos.

CAPÍTULO 2.- NÚMEROS RACIONALES

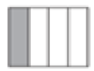
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.1

a)

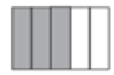
1)



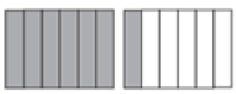
2)



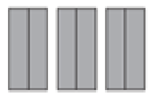
3)



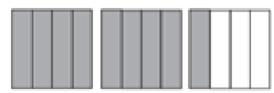
4)



5)



6)



b)

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{8}$ 3) $\frac{10}{4}$ 4) $\frac{2}{5}$ 5) $\frac{3}{2}$ 6) $\frac{6}{3} = 2$

c)

1) $\frac{5}{14}$ 2) $\frac{18}{24}$ 3) $\frac{40}{100}\, y\, \frac{60}{100}$ 4) $\frac{16}{24}$

d)

1) Propia 2) Impropia 3) Propia 4) Propia

1) Propia 2) Impropia 3) Propia 4) Propia

5) Impropia 6) Propia 7) Impropia 8) Propia

9) Impropia 10) Impropia 11) Propia 12) Impropia

13) Mixta 14) Propia 15) Impropia 16) Propia

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.2

a)

1) $1\frac{1}{3}$	2) $1\frac{2}{5}$	3) $1\frac{1}{2}$	4) $3\frac{1}{4}$	5) 4	6) $1\frac{5}{8}$
7) $6\frac{5}{6}$	8) 6	9) $3\frac{6}{7}$	10) $2\frac{10}{13}$	11) $2\frac{2}{13}$	12) $2\frac{1}{12}$
13) $1\frac{1}{18}$	14) $2\frac{13}{16}$	15) $3\frac{11}{40}$	16) $7\frac{33}{65}$	17) $5\frac{14}{105}$	18) $4\frac{38}{305}$

b)

1) $\frac{17}{5}$	2) $\frac{11}{9}$	3) $\frac{30}{7}$	4) $\frac{34}{6}$	5) $\frac{23}{6}$	6) $\frac{35}{4}$
13) $\frac{319}{20}$	14) $\frac{277}{12}$	15) $\frac{507}{14}$	16) $\frac{354}{7}$	17) $\frac{608}{5}$	18) $\frac{1562}{7}$

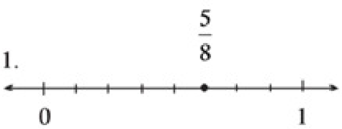
c)

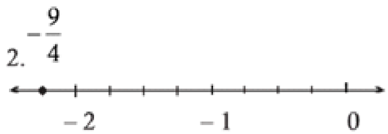
1) Sí	2) No	3) Sí	4) No	5) Sí	6) No
7) Sí	8) No	9) Sí	10) Sí	11) No	12) No

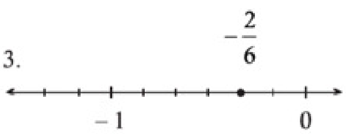
d)

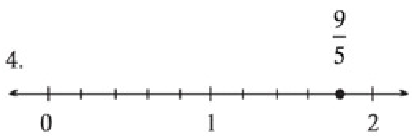
1) $\frac{5}{6}$	2) $\frac{3}{2}$	3) $\frac{3}{4}$	4) $\frac{2}{3}$	5) $\frac{5}{2}$
6) $\frac{1}{5}$	7) $\frac{9}{20}$	8) $\frac{7}{8}$	9) $\frac{4}{5}$	10) $\frac{7}{2}$

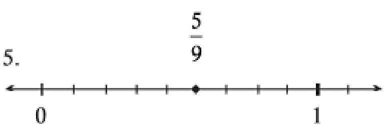
e)

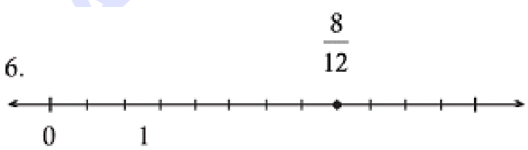
1.


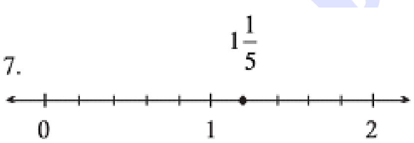
2.


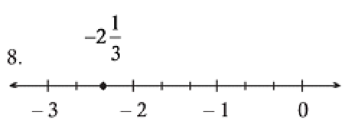
3.


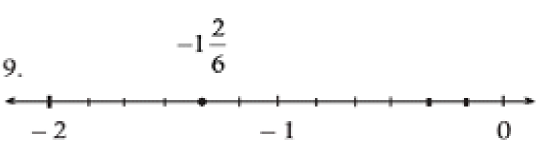
4.


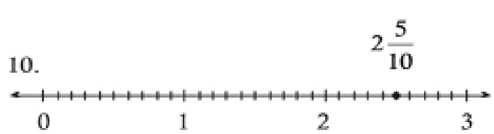
5.


6.


7.


8.


9.


10.


ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.3

a)

1) 2	2) $\frac{1}{2}$	3) $\frac{11}{9}$	4) $\frac{13}{6}$	5) $\frac{11}{7}$
6) $\frac{8}{5}$	7) $\frac{49}{9}$	8) $\frac{69}{8}$	9) 8	10) $\frac{4}{5}$
11) $\frac{1}{3}$	12) $\frac{4}{15}$	13) $\frac{2}{3}$	14) $\frac{5}{17}$	15) $\frac{1}{2}$
16) $\frac{2}{3}$	17) $\frac{1}{5}$	18) $\frac{4}{9}$	19) $\frac{1}{2}$	20) $\frac{14}{9}$
21) $\frac{1}{4}$	22) 0	23) $\frac{2}{7}$	24) $\frac{3}{5}$	25) $\frac{1}{2}$
26) $\frac{14}{13}$	27) 1			

b)

1) $\frac{5}{6}$	2) $\frac{3}{2}$	3) 2	4) $\frac{79}{120}$	5) $\frac{9}{13}$
6) $\frac{7}{8}$	7) $\frac{5}{3}$	8) $\frac{2}{9}$	9) $\frac{35}{16}$	10) $\frac{3}{8}$
11) $\frac{1}{8}$	12) $-\frac{29}{64}$	13) $\frac{6}{5}$	14) $\frac{89}{60}$	15) 0
16) $\frac{109}{120}$	17) 1	18) $\frac{11}{4}$	19) $-\frac{5}{16}$	20) $\frac{3}{10}$
21) $\frac{13}{24}$	22) $\frac{133}{20}$	23) -1	24) $\frac{9}{20}$	25) $\frac{37}{10}$
26) $-\frac{3}{2}$	27) $-\frac{5}{2}$	28) 0	29) $\frac{7}{2}$	30) 7
31) $\frac{517}{60}$	32) $\frac{29}{12}$	33) $\frac{21}{4}$	34) $\frac{3}{2}$	35) $-\frac{31}{32}$
36) $-\frac{17}{12}$				

c)

1) $\frac{9}{4}\ kg$	2) $\frac{83}{20}\ km$	3) $\frac{27}{8}\ kg$	4) $\frac{13}{4}\ h$
5) $\frac{25}{16}\ kg$	6) $\frac{51}{6}\ m$	7) $\frac{7}{12}$	8) $\frac{4}{9}$
9) $\frac{121}{4}\ pulg$	10) $-\frac{5}{8}\ kg$	11) $\frac{1}{4}$	12) $\frac{7}{12}$
13) $\frac{1}{6}$	14) $\frac{3}{8}$	15) $\frac{7}{20}$	16) $\frac{1}{2}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.4

a)

1) $\frac{1}{2}$	2) $\frac{5}{14}$	3) $\frac{1}{9}$	4) $\frac{3}{2}$	5) $\frac{39}{20}$
6) $\frac{17}{10}$	7) $\frac{19}{5}$	8) 5	9) $\frac{37}{5}$	10) $\frac{128}{15}$
11) $\frac{5}{12}$	12) $\frac{9}{10}$	13) $\frac{5}{14}$	14) 1	15) 14
16) 4	17) $\frac{32}{45}$	18) $\frac{1}{3}$	19) $\frac{28}{3}$	20) 15
21) 6				

b)

1) 2 250 litros	2) 2 100 aficionados	3) 1 400 habitantes	4) 150 automovilistas
5) 40 rojas, 20 azules y 60 verdes	6) $30	7) $900	8) 275 kilómetros
9) 60	10) 5 alumnos	11) 3 600 personas	12) 18 pastillas
13) 504 joule			

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.5

a)

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) 3 4) $\frac{13}{12}$ 5) $\frac{1}{2}$

6) $\frac{2}{3}$ 7) 8 8) 5 9) $\frac{2}{5}$ 10) 10

11) $\frac{18}{13}$ 12) $\frac{2}{13}$ 13) $\frac{1}{18}$ 14) $\frac{1}{8}$ 15) $\frac{4}{5}$

16) 12 17) $\frac{1}{3}$ 18) $\frac{9}{2}$ 19) $\frac{3}{2}$ 20) $\frac{3}{13}$

b)

1) $\frac{1}{8}\ kg$ 2) $80\ botellas$ 3) 5 4) $14\ min$

5) $48\ \frac{km}{h}$ 6) $\$18$ 7) $\frac{1}{4}\ litro$ 8) $24\ personas$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 2.6

a)

1) $-\frac{4}{7}$ 2) $\frac{15}{4}$ 3) 2 4) $\frac{3}{4}$ 5) 0

6) $-\frac{7}{5}$ 7) $\frac{1}{8}$ 8) $\frac{3}{2}$ 9) $\frac{1}{4}$ 10) $\frac{1}{2}$

11) $\frac{12}{5}$ 12) $\frac{2}{3}$ 13) $\frac{3}{2}$ 14) 4

b)

1) 3 900 mililitros 2) 4 horas 3) \$2 200 4) Alimentación \$4 000

Renta y Servicios \$6 000

Diversión \$2 000

5) $-137\frac{1}{2}\ kg$ 6) $27\frac{6}{7}\ \frac{lb}{in^2}$ 7) 7 Ancho x $11\frac{1}{4}$ largo

c)

1) $\frac{1}{3}$	2) $\frac{21}{17}$	3) $\frac{67}{19}$	4) 3	5) $\frac{8}{3}$
6) 4	7) 1	8) $\frac{1}{2}$	9) $\frac{7}{43}$	10) 2
11) $\frac{3}{4}$	12) $\frac{1}{2}$	13) $-\frac{1}{2}$	14) $\frac{12}{13}$	15) 1

CAPÍTULO 3.- POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 3.1

a)

1) 16	2) $-15\,625$	3) $\frac{1}{1\,296}$	4) 1	5) -729
6) $-\frac{1}{32}$	7) 81	8) 4	9) $\frac{1}{256}$	10) $\frac{1}{27}$
11) $-\frac{125}{8}$	12) $\frac{343}{27}$	13) $\frac{3\,125}{59\,049}$	14) -9	15) 4
16) $4\,096$	17) 18.49	18) $\frac{343}{216}$	19) $\frac{441}{16}$	20) $\frac{1\,331}{1\,000}$

b)

1) 625	2) $3^{-\frac{1}{3}}$	3) $\frac{200}{9}$	4) $8\,192$	5) $\frac{1}{25}$
6) 1	7) $\frac{16}{9}$	8) $\frac{1}{30}$	9) 20	10) $\frac{9}{4}$
11) 54	12) $15\,625$	13) 16	14) 225	15) $\frac{27}{20}$
16) $11\,664$	17) 3	18) $\frac{1}{65\,536}$	19) $\frac{16}{9}$	20) $\frac{81}{10\,000}$
21) $\frac{1}{216}$				

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 3.2

a)

1) 7 2) 17 3) 3 4) 9 5) 14

6) 24 7) -12 8) 24 9) 12 10) 6

11) 270 12) 45 13) 100 14) 64 15) 2

16) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{13}{6}}$ 17) 5^2 18) 2 19) 3 20) $5^{\frac{19}{24}}$

21) 5

b)

1) $2\sqrt{5}$ 2) $6\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt[3]{2}$ 4) $3\sqrt[3]{5}$

5) $5\sqrt[3]{2}$ 6) $9\sqrt{2}$ 7) $6\sqrt{5}$ 8) $6\sqrt[4]{5}$

9) $2\sqrt[3]{2}$ 10) $2\sqrt{15}$ 11) $2\sqrt[4]{2}$ 12) $\frac{2}{3}\sqrt{15}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 3.3

a)

1) $12\sqrt{2}$	2) $7\sqrt{3}$	3) $\frac{13}{4}\sqrt{5}$
4) $\sqrt[3]{9}$	5) $-5\sqrt{2}$	6) $-2\sqrt{5}$
7) $\frac{7}{6}\sqrt[4]{7}$	8) $-8\sqrt[3]{2}$	9) $\frac{33}{20}\sqrt{6}$
10) $5\sqrt{2}$	11) $\sqrt{3}$	12) $6\sqrt{5}$
13) $-7\sqrt{2}$	14) $2\sqrt{3}$	15) $3\sqrt{5}-\sqrt{3}$
16) $7\sqrt{2}$	17) $3\sqrt{2}+20\sqrt{3}-22\sqrt{5}$	18) $-5\sqrt{2}$
19) $\sqrt{3}$	20) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$	21) $4\sqrt{11}-\sqrt{5}$
22) $3\sqrt[3]{3}-5\sqrt[3]{2}$	23) $\sqrt[3]{3}$	24) $4\sqrt[3]{2}$

b)

1) 4	2) 5	3) $\sqrt{21}$	4) $3\sqrt{7}$
5) $6\sqrt{5}$	6) $12\sqrt{3}$	7) $4\sqrt{6}$	8) 45
9) 180	10) 18	11) $\frac{5}{4}\sqrt{30}$	12) 60
13) $3\sqrt[3]{5}$	14) $2\sqrt[3]{25}$	15) $20\sqrt[3]{90}$	16) $2\sqrt[3]{3}$
17) $\sqrt[6]{675}$	18) 2	19) $2\sqrt[15]{6\,561}$	20) $2\sqrt[12]{2}$
21) $6\sqrt[3]{2}$	22) $2\sqrt[3]{9}$	23) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{2\,592}$	24) $\frac{1}{8}\sqrt[6]{24}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 3.4

a)

1) 6 2) $\sqrt{2}$ 3) $\frac{5}{6}\sqrt{3}$ 4) $\frac{7}{4}\sqrt{5}$

5) $\sqrt{7}$ 6) $\frac{1}{4}\sqrt{5}$ 7) $\frac{1}{2}$ 8) $2\sqrt[3]{2}$

9) $\sqrt[15]{4}$ 10) $\sqrt[6]{54}$ 11) 1 12) $\sqrt[14]{12}$

13) 5 14) $\sqrt[6]{\frac{9}{8}} - \sqrt[6]{\frac{3}{4}}$ 15) $\sqrt[4]{2} + \sqrt[12]{2}$ 16) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[6]{2}}{2} - \frac{\sqrt[10]{8}}{2}$

b)

1) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{9}$ 4) $\sqrt[4]{2}$

5) $2\sqrt{6}$ 6) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ 7) $\frac{1}{10}\sqrt{15}$ 8) $3\sqrt[3]{2}$

9) $\sqrt{5}$ 10) $2-\sqrt{6}$ 11) 1 12) $12-4\sqrt{7}$

13) $2\sqrt{6}-4$ 14) $-\frac{1}{2}\left(5+3\sqrt{3}\right)$ 15) $-11-5\sqrt{5}$ 16) $\frac{2}{7}\left(3-\sqrt{2}\right)$

17) $-\frac{1}{6}\left(1+\sqrt{7}\right)$ 18) $-\frac{1}{3}\left(5+\sqrt{10}\right)$ 19) $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ 20) $\frac{2}{11}\left(7+3\sqrt{3}-\sqrt{5}-2\sqrt{15}\right)$

c)

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	2) $\frac{2}{5\sqrt{2}}$	3) $\frac{7}{5\sqrt{7}}$
4) $\frac{12}{5\sqrt{6}}$	5) $\frac{1}{2\sqrt[3]{4}}$	6) $\frac{3}{2\sqrt[5]{16}}$
7) $\frac{5}{2\sqrt{15}}$	8) $\frac{1}{3(\sqrt{2}-1)}$	9) $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$
10) $\frac{9}{2(5-\sqrt{7})}$	11) $-\frac{1}{7+3\sqrt{5}}$	12) $-\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$
13) $-\frac{3}{2+\sqrt{7}}$	14) $\frac{4}{3-\sqrt{5}}$	15) $\frac{23}{4-10\sqrt{2}+6\sqrt{3}+8\sqrt{6}}$

CAPÍTULO 4.- OPERACIONES BÁSICAS CON POLINOMIOS

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.1

a)

1) Grado absoluto 1
2) Grado absoluto 4
3) Grado absoluto 3
4) Grado absoluto 5
5) Grado absoluto 4

b)

1) Grado 2 respecto a la letra a.
2) Grado 3 respecto a la letra b.
3) Grado 3 respecto a la letra a.
4) Grado 5 respecto a la letra b.
5) Grado 3 respecto a la letra a.
6) Grado 7 respecto a la letra x

c)

1) El grado absoluto del polinomio es 6 ya que el término de mayor grado es $3b^6$
2) El grado absoluto del polinomio es 5 ya que el término de mayor grado es $-4b^5$
3) El grado absoluto del polinomio es 7 ya que el término de mayor grado es $-2ax^7$

d)

Existe una infinidad de soluciones.

e)

Existen diferentes soluciones.

f)

1) a
2) 0
3) $-\frac{23}{24}a^2b$
4) $\frac{1}{2}xy$
5) m
6) $14m^{x+1}$
7) $-\frac{43}{36}ab$
8) $9m^{a-1}$
9) 0
10) $-\frac{17}{20}m$

g)

1) $-2a-\frac{4}{3}b$
2) $25x-12y-10$
3) $-2a-14$
4) $12x^4y+7x^3y^2-5y^3-40$
5) $\frac{13}{25}a^{m-1}+\frac{1}{50}b^{m-2}$
6) $2.7a-3.3b-3.4c$
7) $0.175xy^2-0.35y^3+25$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.2

1) 0
2) -26
3) 5
4) 8
5) 8
6) $\frac{44}{3}\approx 14.67$
7) -5
8) $\frac{311}{9}\approx 34.56$
9) $\frac{3}{8}\approx 0.38$
10) $\frac{\sqrt{3}}{6}+2\sqrt{2}\approx 3.12$
11) 31
12) $\frac{8}{3}\approx 2.67$
13) 15
14) 14
15) $\frac{223}{12}\approx 18.58$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.3

a)

1) $6x - 9y$
2) $4a + 3b$
3) $6x - 4y$
4) $-2x + 2y - z$
5) $5ab + 5a + b - 3$
6) $4bc + 6b + 4c$
7) $3xy + 13yz - 4z$
8) $a^{x+3} - 3a^{x+2} + a^{x+1} - a^{x-1} - 2a^x$
9) $11mn^2$
10) $\frac{11}{6}a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{12}b^2$

b)

1) $2b$
2) $11a + b - 4$
3) $2a + 2b$
4) $y^5 + 11y^4 - 40y^3 + 14y^2 + 19y - 31$
5) $m^{n+1} - 11m^{n-2} + 8m^{n-3} - 28m^{n-5} - 8m^n$
6) $2x + 2y - 5z$
7) $9mn - 6m^2$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.4

1) $a+4$
2) $6a-7$
3) $8x-1$
4) $9-6x$
5) $17y-2x$
6) $3x-9y$
7) $20a-12b$
8) $a-b$
9) $23x-20$
10) $x+2y$
11) $8y-x$
12) $5-2a$
13) 3
14) $2x-18$
15) $6x+2y$
16) $-7x-7$
17) $23-8x$
18) $5x-7y$
19) 7
20) $-a-3b+4$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.5

a)

1) $-6x^3y^5$
2) $-15x^6y^5$
3) $14x^3y^5$
4) $12x^7y^5$
5) $4x^6$
6) $81x^8$
7) $64x^{15}$
8) $125x^6$
9) $6x^3y^4-10x^4y^5$
10) $6x^4y^3-12x^5y^2$
11) $8x^3y^6-12x^4y^4$
12) $10x^3y^7-25x^2y^6$
13) $4x^4y^4-6x^3y^5$
14) $15x^4y^4-6x^3y^6$
15) $10x^4y^6-20x^6y^5$
16) $21x^5y^6-14x^7y^7$
17) $3xy^3-4x^3y$
18) $11x^3y^2-2x^2y$
19) $2x^3y^4+13x^2y^6$
20) $2x^3y^4-x^4y^3$

b)

1) $6x^2 - 5xy - 6y^2$
2) $8x^2 + 6xy - 9y^2$
3) $15x^2 - 19xy + 6y^2$
4) $14x^2 - 43xy + 20y^2$
5) $12x^2 - 37x + 28$
6) $18x^2 - 63x + 40$
7) $20x^2 - 9x - 20$
8) $14x^2 - 45x - 14$
9) $6x^3 + x^2 - 30x - 25$
10) $12x^3 + 19x^2 - 1$
11) $8x^4 + 8x^3 + 25x - 14$
12) $5x^4 - 13x^3 - 24x^2 + 3x + 9$
13) $6x^3 - 5x^2y - 8xy^2 + 3y^3$
14) $9x^3 + 9x^2y - 22xy^2 + 14y^3$
15) $8x^3 + 14x^2y - 27xy^2 + 9y^3$
16) $15x^3 - 18x^2y + 13xy^2 - 2y^3$
17) $2x^4 - 3x^3y - 8x^2y^2 + 15xy^3 - 6y^4$
18) $6x^4 - 5x^3y + 6x^2y^2 - xy^3 - 6y^4$
19) $10x^4 - x^3y + 15x^2y^2 + 5xy^3 + 3y^4$
20) $x^4 - 8x^2y^2 + 9xy^3 - 2y^4$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 4.6

a)

1) $3x^2 - 2x + 1 + \frac{1}{2x+3}$
2) $2x^2 - x + 2 + \frac{1}{3x-1}$
3) $5x^2 - 2x - 3 + \frac{5}{2x+1}$
4) $3x^2 - 4x + 2 + \frac{1}{5x+4}$
5) $2x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2(2x-1)}$
6) $2x^2 - 3x + 4 - \frac{1}{2x+3}$
7) $3x^2 + 6x + 1 + \frac{13}{2x-4}$
8) $2x^2 - x + 3 - \frac{5}{4x+2}$
14) $3x^3 + 2x^2 - x + 2 - \frac{1}{x-3}$
15) $2x^3 - 3x^2 - x + 2 - \frac{4}{2x+3}$
16) $x^3 + 3x^2 - 2x - 1$
17) $2x^2 - x - 3$
18) $5x^2 + 4x - 3$
19) $3x^3 + 2x^2 - x - 2 - \frac{12}{2x-3}$
20) $2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$
21) $x^3 - 3x^2y + 2xy^2$

9) $2x^2 - x + 4 - \frac{3}{x^2+2x-1}$

10) $2x^2 + x - 1 + \frac{6x-2}{x^2+3x-1}$

11) $x^2 - 2x + 2 - \frac{1}{3x^2+6x+2}$

12) $3x^2 + 8x + 1 - \frac{8}{2x^2-x+2}$

13) $2x^3 - x^2 + x - 3 - \frac{3}{3x+2}$

22) $x^3 - 3x^2y + 4xy^2$

23) $3x^2 - 2xy + 4y^2$

24) $x + y + z$

25) $x + y$

CAPÍTULO 5.- PRODUCTOS NOTABLES

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.1

1) $b^2 + 2b + 1$
2) $4x^2 + 4xy + y^2$
3) $16a^2 - 40ab + 25b^2$
4) $\frac{4}{9}l^2 + \frac{4}{5}lm + \frac{9}{25}m^2$
5) $\frac{16}{49}a^2 - \frac{16}{35}am^3 + \frac{4}{25}m^6$
6) $16x^2y^2 - 48xyz + 36z^2$
7) $l^2 + 6lm^{3/4} + 9m^{3/2}$
8) $25x^6 + \frac{20}{7}m^4x^3 + \frac{4}{49}m^8$
9) $64x^2 + 80mx + 25m^2$
10) $\frac{9}{64}a^2 + \frac{3}{10}ab^3 + \frac{4}{25}b^6$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.2

1) $b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
2) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$
3) $64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3$
4) $\frac{8}{27}l^3 + \frac{4}{5}l^2m + \frac{18}{25}lm^2 + \frac{27}{125}m^3$
5) $\frac{64}{343}a^3 - \frac{96}{245}a^2m^3 + \frac{48}{175}am^6 - \frac{8}{125}m^9$
6) $64x^3y^3 - 288x^2y^2z + 432xyz^2 - 216z^3$
7) $l^3 + 9l^2m^{3/4} + 27lm^{3/2} + 27m^{9/4}$
8) $125x^9 + \frac{150}{7}m^4x^6 + \frac{60}{49}m^8x^3 + \frac{8}{343}m^{12}$
9) $-512x^3 - 960mx^2 - 600m^2x - 125m^3$
10) $-\frac{27}{512}a^3 - \frac{27}{160}a^2b^3 - \frac{9}{50}ab^6 - \frac{8}{125}b^9$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.3

a)

1) $x^4 + 4bx^3 + 6b^2x^2 + 4b^3x + b^4$

2) $16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4$

3) $1024a^5 - 6400a^4b + 16000a^3b^2 - 20000a^2b^3 + 12500ab^4 - 3125b^5$

4) $-32768x^5 - 102400mx^4 - 128000m^2x^3 - 80000m^3x^2 - 25000m^4x - 3125m^5$

5) $\dfrac{256}{2401}a^4 - \dfrac{512}{1715}a^3m^3 + \dfrac{384}{1225}a^2m^6 - \dfrac{128}{875}am^9 + \dfrac{16}{625}m^{12}$

6) $125x^9 + \dfrac{150}{7}m^4x^6 + \dfrac{60}{49}m^8x^3 + \dfrac{8}{343}m^{12}$

b) $729c^{12/5} + 1458c^{14/5} + 1215c^{16/5} + 540c^{18/5}$

c) $60(3^{14})b^{13} + (3^{15})b^{15}$

d) $30618a^{10}b^2$

e) $840u^4b^6$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.4

1) $25x^2 - 16y^2$

2) $9a^2 - 49b^2$

3) $9y^2 - 49x^2$

4) $81s^2 - 16r^2$

5) $\frac{25}{16}x^2 - \frac{9}{16}y^2$

6) $\frac{25}{64}y^2 - \frac{9}{49}x^2$

7) $9x^2y^2 - 64y^2z^2$

8) $9y^8 - 81x^4$

9) $9a^2c^2 - 9a^2b^2$

10) $9y^2z^4 - 9x^4y^8$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 5.5

1) $y^2 + 3y + 2$

2) $-16x^2 - 6ax + a^2$

3) $24x^2 - 10ax + a^2$

4) $6x^2 + 10ax + 4a^2$

5) $5x^2 - 48ax + 64a^2$

6) $8x^2 - 12xy + 4y^2$

7) $4r^4 - 10r^2s^3 + 6s^6$

8) $64y^6 + 8y^3z - 6z^2$

9) $-24a^2 - 90ab + 81b^2$

10) $16f^2 - 28fg + 10g^2$

CAPÍTULO 6.-FACTORIZACIÓN

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.1

1) $14x(x-3y)$
2) $6x^3y^2(3x+4y^2z^3)$
3) $6a^3y^2z^2(2a^2y+5z^3)$
4) $2a^3b^2c^4(15b^3c^3-11a^3)$
5) $2a^2x^2(17a^4b^7-15xz^4)$
6) $13x^2y^5z^2(5xz-8)$
7) $30x^5y^6z^3(3y^2z-1)$
8) $40x^4y^5z^5(4x^3+z^4)$
9) $16a^{11}b^6c^4(7b^3+9c^8)$
10) $16q^8r^6s^5(3r^4-5s^2)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.2

1) $(3x+y)(5z-2)$
2) $(2a+4)(3b+c)$
3) $(5w+2x)(2y+3z)$
4) $(7w+3x)(2y-7z)$
5) $(2a-3b)(3c-8d)$
6) $(x+y)(w-4)$
7) $(7x-y)(-z+4)$
8) $(6x+4y)(z+8)$
9) $(8x+5y)(5z-7)$
10) $(6w-5z)(2y-9)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.3

1) $(3y + a + b)(3y - a - b)$

2) $(5x^2 + 3x + y)(5x^2 - 3x - y)$

3) $(3a^2 - b^2)(5a^2 + b^2)$

4) $\left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y\right)\left(\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y\right)$

5) $(3xy + 8yz)(3xy - 8yz)$

6) $(5y^4 - 2a)(7y^4 + 2a)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.4

1) $(x + 5)^2$

2) $(a - 8)^2$

3) $\left(\frac{3}{5}r + \frac{3}{4}\right)^2$

4) $\left(\frac{2}{3}\mathrm{m} - \frac{3}{4}\right)^2$

5) $\left(\frac{3}{5}l^2 + 6\right)^2$

6) No es T.C.P.

7) $\left(\frac{3}{8}x^3 + \frac{7}{6}\right)^2$

8) $\left(\frac{9}{3}x^2 + \frac{8}{3}x^3\right)^2$

9) $\left(\frac{6}{7}x^2 - \frac{3}{7}\right)^2$

10) $\left(-\frac{7}{9}x^2 - \frac{5}{7}\right)^2$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.5

1) $(x^4 + 2)^2 - x^4 = (x^4 + x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$

2) $(x^2 - 1)^2 - 4x^2 = (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

3) $(4m^2 + mn - 3n^2)(4m^2 - mn - 3n^2) = (m + n)(m - n)(4m + 3n)(4m - 3n)$

4) $(6x^2 - 7y^2)^2 - 25x^2y^2 = (6x^2 + 5xy - 7y^2)(6x^2 - 5xy - 7y^2)$

5) $(2a^4 - 7b^4)^2 - 25a^4b^4 = (2a^4 + 5a^2b^2 - 7b^4)(2a^4 - 5a^2b^2 - 7b^4)$

6) $(7x^4 + 10y^4)^2 - 64x^4y^4 = (7x^4 + 8x^2y^2 + 10y^4)(7x^4 - 8x^2y^2 + 10y^4)$

7) $(c^4 - 4)^2 - c^4 = (c^4 + c^2 - 4)(c^4 - c^2 - 4)$

8) $(m^2 + 5m + 15)(m^2 - 5m + 15)$

9) $(7c^4 + 11c^2mn + 14m^2n^2)(7c^4 - 11c^2mn + 14m^2n^2)$

10) $(9a^2b^4 + 2ab^2x^4 - 16x^8)(9a^2b^4 - 2ab^2x^4 - 16x^8)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.6

1) $(x + 4)(x + 7)$

2) $(x + 8)(x - 1)$

3) $(x - 6)(x - 9)$

4) $(3x + 10)(x - 2)$

5) $(-5x + 4)(-2x - 9)$

6) $(-4x - 12)(-5x - 4)$

7) $(14x - 15)(-10x + 16)$

8) $(5x - 18)(-21x + 25)$

9) $(x^2 - 8)(x^2 - 2)$

10) $(2x - 7)(7x + 3)$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 6.7

1) $(x - 4)(x + 2)(2x - 3)(4x + 5)$

2) $(a - 2)^2(a + 3)(a - 3)(a + 4)$

3) $(y - 6)(y + 2)(y + 5)(y^2 - y + 3)$

4) $(m - 4)(2m^4 + 3)$

5) $(z + 5)(z - 4)(z + 3)(z - 3)(z - 2)(z + 1)$

6) $(x - 3)(x - 2)^2(x + 4)(x^2 - 5x + 3)$

CAPÍTULO 7.- FRACCIONES ÁLGEBRAICAS

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.1

1) $\frac{x-2}{x+2}$ 2) $\frac{2h-1}{3h+1}$

3) $\frac{a+3}{a-2}$ 4) $\frac{3w-2}{2w+3}$

5) $\frac{2x-3y}{3x+2y}$ 6) $\frac{a-3b}{a+2b}$

7) $\frac{1}{x+1}$ 8) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}$

9) $\frac{1}{x+1}$ 10) $\frac{-x(x-1)y^2}{x-y}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.2

1) $\frac{n^2}{8mx}$ 2) $\frac{2x}{3}$

3) $\frac{x+1}{4}$ 4) $\frac{4}{(m-n)^2}$

5) $\frac{(x+y)y}{x^2}$ 6) $\frac{x(x-2y)}{(x+2y)^2}$

7) 1 8) $\frac{1}{2a(a+1)}$

9) $\frac{x-y}{x-1}$ 10) $\frac{a-1}{3(a+5)}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.3

1) $\frac{b^2x^2}{6a}$

2) $\frac{4x^2}{5y^2}$

3) $\frac{3b^2}{5a^2xy^3}$

4) $\frac{2}{a^2x^2}$

5) $\frac{3y^4}{2a^2b^5x}$

6) $\frac{bx^2}{2}$

7) $\frac{3}{7ax^2}$

8) $\frac{4(x+y)}{3}$

9) $\frac{3xy}{x-y}$

10) $\frac{x^2+1}{x^2}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.4

1) 1

2) 0

3) $\frac{x-7}{3x-7}$

4) $\frac{2}{3x}$

5) $\frac{2}{3x^2}$

6) $\frac{1}{2x^2}$

7) $-\frac{3}{x}$

8) 2

9) $\frac{x-1}{x+1}$

10) x

11) $\frac{x}{x-2}$

12) $\frac{x+3}{x-6}$

13) $\frac{x}{2x^3+x^2-6x-3}$

14) $\frac{8t-3}{t(t-1)}$

15) $\frac{-3(a+5)}{4(a-3)(a+3)}$

16) $\frac{3}{2(a-9)}$

17) $\frac{2(2x^2+5x-2)}{(x-2)(x+2)(x+3)}$

18) $\frac{-(x^2-3x-13)}{(x-2)(x+1)(x+4)}$

19) $\frac{x^2-6x+11}{(x+1)^2(x+7)}$

20) $\frac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 7.5

1) $x(x+1)$

2) $\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$

3) $\dfrac{b}{a+b}$

4) $\dfrac{1}{2x+1}$

5) m

6) -1

7) $\dfrac{a-b+c}{a-b-c}$

8) $\dfrac{-(2a^2-2a+1)}{2a-1}$

9) 1

10) $\dfrac{x}{x+1}$

CAPÍTULO 8.- EXPONENTES Y RADICALES

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 8.1

1) $3^6 = 729$

2) $\frac{16}{81}$

3) $2^{15} = 32{,}768$

4) $4x^2y^3$

5) $8a^9b^6$

6) $a^{12}bc^6$

7) $b^n a^{3n} b^5$

8) $3^2 = 9$

9) $\frac{1}{2}$

10) $\frac{1}{a^3b^4c^3}$

11) $\frac{3x^{2/3}}{y}$

12) a^6b^9

13) 0.8

14) 3

15) $2a\sqrt{2a}\left|\frac{1}{b^3}\right|$

16) $6x^{7/12}$

17) $5|x|y^2$

18) $\frac{2}{3}\frac{signo(x)}{|y|}$

19) $3\sqrt{3}$

20) $2\sqrt[3]{5}$

21) 4

22) $a^{9/5}$

23) $3\sqrt{10}|x^3|y^2$

24) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE 8.2

1) $x^{4/3}$

2) $3 \cdot \sqrt[3]{10}$

3) $3\sqrt[3]{2x}$

4) $-2y\sqrt[3]{5x}$

5) $2 \cdot \sqrt[4]{3a^3} \cdot \sqrt{|a|}$

6) $2\sqrt[6]{2}$

7) $3a \cdot \sqrt[6]{3a}$

8) $\sqrt{6} + 2$

9) $\sqrt{21} + 14$

10) $6\sqrt{21} + 14\sqrt{6}$

11) $2x - \sqrt{xy}$

12) $\sqrt{xy} \cdot \left(5\sqrt{2x} - 2\sqrt{5y}\right)$

13) 1

14) 4

15) -1

16) -10

17) $7\sqrt{35} + 29$

18) $17 - 12\sqrt{2}$

19) $4\sqrt{6} + 11$

20) $-x + \sqrt{x} + 6$

21) $-2x^2 - 3x\sqrt{3} + 6$

22) $x^2 - y$

23) $9x^2 - 2y$

24) $x + 2\sqrt{xy} - 3y$

25) $x^2 - 2x\sqrt{3} + 3$

26) $2x + 2\sqrt{6xy} + 3y$

27) $8\sqrt{x+2} + x + 18$

28) $-4\sqrt{x-3} + x + 1$

29) $-6\sqrt{x+9} + x + 18$

30) $-6\sqrt{x+1} + x + 10$